Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

66. BAND, 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 22. JANUAR 1957)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1957

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F.K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W35 Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28—30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

66. Band **Inhalt** 4. Heft

Seite

Leptin, H., Linear kompakte Moduln und Ringe. II 289

Djerasimović, B., Über die binären quadratischen Formen 328

Baer, R., Lokal Noethersche Gruppen 341

Schubart, H., und H. Wittich, Über die Lösungen der beiden ersten Painleveschen Differentialgleichungen 364

Hellwig, G., Über die Anwendung der Laplace-Transformation auf Randwertprobleme 371

LEPTIN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 289—327 (1957)

Linear kompakte Moduln und Ringe. II

Von
HORST LEPTIN

Einleitung

Dies ist die Fortsetzung und Ergänzung meiner Arbeit gleichen Titels im 62. Band dieser Zeitschrift. Ich werde hier allerdings, wie auch gelegentlich schon in [8], allgemeinere lineare topologische Moduln und Ringe untersuchen, so insbesondere in den §§ 3 und 6.

Wir übernehmen in dieser Arbeit durchweg die Bezeichnungen, Begriffe und Abkürzungen aus [8], ein l.k. Ring ist also z.B. ein linear kompakter Ring und ein i.e.S.l.k. Modul ein im engeren Sinne linear kompakter, d.h. ein vollständiger l.t. (linear topologischer) Modul, in dessen diskreten Restklassenmoduln die Minimalbedingung gilt. Die Sätze und Hilfssätze aus [8] zitieren wir als Satz L1, Satz L2, ..., (L1), (L2) usw. Wir führen „(+)" als neues Zeichen für die algebraische direkte Summe ein: $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}(+)\mathfrak{B}$ bedeutet, daß der Modul $\mathfrak{M}$ die algebraische direkte Summe seiner Untermoduln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist. Hier brauchen insbesondere $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ nicht abgeschlossen zu sein. $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ bedeutet dagegen nach wie vor, daß $\mathfrak{M}$ algebraisch und topologisch die direkte Summe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist. Ist M irgendeine Menge, so bezeichnen wir mit $\{x|E(x), x \in M\}$ oder kürzer $\{x|E(x)\}$ die Teilmenge aller x aus M, welche die Eigenschaft E haben; ist also beispielsweise $\mathfrak{M}$ ein Modul über einem Ring R, so ist $\{\xi|\xi\mathfrak{M} = 0, \xi \in R\}$ das zweiseitige Unterideal aller $\mathfrak{M}$ anullierenden Elemente aus R. Ist $\{\xi|\xi\mathfrak{M} = 0, \xi \in R\} = 0$, so nennen wir $\mathfrak{M}$ einen *treuen* R-Modul und sagen, R wirkt *treu* auf $\mathfrak{M}$.

§ 1 enthält genauere Untersuchungen über das Radikal eines l.k. Ringes. Wir beweisen zunächst, daß ein treuer l.k. Modul über einem l.k. Ring R genau dann direkte Summe minimaler Untermoduln ist, wenn R halbeinfach ist (Satz 2). Nach Satz L9 ist das Radikal eines i.e.S.l.k. Ringes r-nilpotent. Wir zeigen, daß hiervon auch die Umkehrung gilt, genauer: Ist der Ring R l.k. und N sein Radikal, so ist N_* das kleinste Ideal, für das der Restklassenring R/N_* in der gröbsten linearen Topologie i.e.S.l.k. ist (Satz 3). Ferner gilt für das Radikal allgemein die Formel ${}_*N + N_* = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{N^i} = N_\omega$.

Die Ergebnisse von § 1 beantworten nicht die Frage nach der Existenz l.k. Ringe, deren Radikal nicht nilpotent ist ($\underset{*}{N} \neq 0$). In **§ 2** definieren wir nun eine weite Klasse l.k. Ringe, unter ihnen solche, deren Radikal idempotent ist. Wir können allgemeiner die sämtlichen abgeschlossenen idempotenten quasiregulären zweiseitigen Ideale dieser Ringe angeben (Satz 8).

§ 3 dient hauptsächlich zur Vorbereitung auf § 4 und enthält die Definition und Untersuchungen von Matrixringen beliebigen Grades über voll-

ständigen linear topologischen Ringen S. Ist $\mathfrak{a}$ eine Kardinalzahl, so ist der Matrixring $S^{(\mathfrak{a})}$ vom Grade $\mathfrak{a}$ über S definiert als Ring aller hyperstetigen Endomorphismen eines Moduls $\mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$, der eine gewisse topologische (jedoch für unendliches $\mathfrak{a}$ nicht tychonoffsche) direkte Summe von $\mathfrak{a}$ zu S isomorphen Summanden ist. Enthält S ein Einselement, so läßt sich $S^{(\mathfrak{a})}$ durch Matrizen $(s_{\mu\nu})$ vom Grade $\mathfrak{a}$ mit Elementen $s_{\mu\nu} \in S$ und summierbaren Spalten $\{s_{\mu\nu}\}_\mu$ beschreiben. Die Definition von $S^{(\mathfrak{a})}$ als Endomorphismenring hat unter anderem den Vorteil, daß man $S^{(\mathfrak{a})}$ damit von vornherein als vollständigen l.t. Ring erhält. Im übrigen kann man $S^{(\mathfrak{a})}$ stets durch Matrizen $(s_{\mu\nu})$ mit Elementen $s_{\mu\nu} \in S^{(1)}$ beschreiben, wobei $S^{(1)}$ der Ring aller hyperstetigen mit den Rechtsmultiplikationen von S vertauschbaren Modulendomorphismen von S ist. Allgemein gilt $S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} = S^{(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})}$. Enthält S eine Eins, so entsprechen die zweiseitigen abgeschlossenen Ideale von $S^{(\mathfrak{a})}$ umkehrbar eindeutig den zweiseitigen abgeschlossenen Idealen von S (Satz 11). Für l.k. S und endliches $\mathfrak{a}$ ist $S^{(\mathfrak{a})}$ stets l.k., für unendliches $\mathfrak{a}$ dagegen nur, falls S i.e.S.l.k. ist, und zwar ist dann auch $S^{(\mathfrak{a})}$ i.e.S.l.k. (Satz 12)! Ein l.k. Matrixring unendlichen Grades ist also stets i.e.S.l.k.. Schließlich bestimmen wir noch das Radikal eines l.k. Ringes $S^{(\mathfrak{a})}$.

In **§ 4** beweisen wir die allgemeine Fassung des Satzes von ARTIN über primäre Ringe mit Minimalbedingung ([2], II, § 9, Satz 2): Ein i.e.S.l.k. primärer Ring mit Eins ist Matrixring über einem i.e.S.l.k. vollständig primären Ring (Satz 16). Dabei heißt ein Ring *primär*, bzw. *vollständig primär*, wenn der Restklassenring nach seinem Radikal einfach, bzw. ein Schiefkörper ist. Bei einem l.k. primären Ring ist dieser Restklassenring dann also nach Satz L12 voller Endomorphismenring über einem Vektormodul. Den Rang dieses Vektormoduls bezeichnen wir als den *Grad* des primären Ringes. Aus § 3 geht hervor, daß die Beschränkung auf i.e.S.l.k. in Satz 16 bei primären Ringen unendlichen Grades notwendig ist. Die Frage nach der Existenz primärer l.k., aber nicht i.e.S.l.k. Ringe unendlichen Grades (die dann natürlich keine Matrixringe sein können) bleibt unbeantwortet.

Die Hauptschwierigkeit beim Beweis des genannten Satzes bildet der Nachweis der Summierbarkeit eines Systems orthogonaler Idempotente des Ringes. Da bei Ringen endlichen Grades diese Summierbarkeit trivial ist, kann man für primäre l.k. Ringe mit Eins das Analogon des Artinschen Satzes schon beweisen, wenn lediglich das Radikal nilpotent ist. Das Problem der Fortsetzbarkeit orthogonaler Idempotente des einfachen Restklassenringes zu orthogonalen Idempotenten des Ringes selbst ist dann sehr einfach lösbar. Dieses Fortsetzbarkeitsproblem ist in anderem Zusammenhang in letzter Zeit übrigens von ZELINSKY behandelt worden [9].

Ein weiteres wichtiges Resultat des vierten Paragraphen ist Satz 15: Ein i.e.S.l.k. Ring mit Eins ist vollständige direkte Summe von unzerlegbaren Linksidealen, welche von minimalen orthogonalen Idempotenten erzeugt werden. Mit dem § 4 beenden wir unsere Untersuchungen l.k. Ringe.

In § 5 entwickeln wir in allgemeiner Form die Theorie der reinen Homomorphismen, die wir in [6] für Prüfersche Gruppen aufgestellt hatten. Der Hauptsatz dieser Theorie, Satz 18, gilt für l.k. Moduln mit kommutativem Multiplikatorenring: Das System $\Phi(\mathfrak{M}, A)$ der reinen Homomorphismen des l.k. Moduls $\mathfrak{M}$ auf direkte Summen aus Moduln eines Systems A ist induktiv geordnet. Wir haben hier die reinen Homomorphismen etwas anders definiert als in [6]; für den Fall, daß A aus einrangigen Prüferschen Gruppen besteht, stimmen jedoch beide Definitionen überein. Der Beweis von Satz 18 verläuft wesentlich anders als der des Satzes (4, 5) aus [6]. Dieser letzte Satz läßt sich mit Hilfe des Dualitätsatzes natürlich auch aus den Kulikoffschen Sätzen über die Basisuntergruppen gewinnen (vgl. etwa [3]), beschränkt man sich auf kompakte Prüfersche Gruppen, so ergibt die Übertragung des Beweises von Theorem 1 aus [3] sogar einen etwas einfacheren Beweis der Sätze aus [6], der sich auch leicht auf den Fall beliebiger Prüferscher Gruppen übertragen läßt. Diese Möglichkeit der Dualisierung ist nun bei den hier behandelten Moduln nicht mehr gegeben, deshalb scheint mir die Aussage von Satz 18 tiefer zu liegen, als die von Satz (4, 5) aus [6]. Ich möchte noch bemerken, daß mir während der Entstehung von [6] die Ergebnisse von KULIKOFF und FUCHS [3] nicht bekannt waren. Satz 18 erlaubt, sämtliche Sätze aus [6], § 5 fast wörtlich auf l.k. Moduln über beliebigen vollständigen diskreten Bewertungsringen zu übertragen. Wir formulieren in § 5 dieser Arbeit deshalb nur die wichtigsten dieser Sätze, ohne näher auf Beweise einzugehen.

Als neues wesentliches Ergebnis erhalten wir den Satz, daß der Kern eines reinen Homomorphismus stets algebraisch direkter Summand ist (Satz 17). Hieraus folgt ein Satz, der neues Licht auf die Bedeutung des von PRÜFER eingeführten Begriffs der Servanzuntergruppe oder, wie man jetzt sagt, der reinen Untergruppe wirft. Bekanntlich ist jede Untergruppe einer (diskreten) abelschen Gruppe rein, falls sie als direkter Summand der Gruppe auftritt; die Umkehrung hiervon ist jedoch nicht richtig, die Torsionsuntergruppe einer gemischten abelschen Gruppe ist z.B. stets rein, ohne im allgemeinen direkt abspaltbar zu sein. Ein abgeschlossener Untermodul $\mathfrak{N}$ eines l.k. Moduls $\mathfrak{M}$ über einem vollständigen diskreten Bewertungsring ist rein, falls er direkter Summand ist, und zwar ist er auch dann rein, wenn er lediglich *algebraischer* direkter Summand ist. *Hiervon gilt nun auch die Umkehrung*, d.h.: Jeder abgeschlossene reine Untermodul eines l.k. Moduls über einem vollständigen diskreten Bewertungsring ist algebraischer direkter Summand (Satz 21). An anderer Stelle zeigen wir, daß dieser Satz auch für beliebige abelsche Gruppen gilt. Dieser Satz gestattet, die algebraische Struktur der kompakten abelschen Gruppen explizit anzugeben.

§ 6 schließlich enthält die Dualitätstheorie linear topologischer Moduln über einem vollständigen diskreten Bewertungsring B. Da wir den Modellfall $B =$ Ring der ganzen p-adischen Zahlen bereits in [6] und [7] ausführlich behandelt haben, konnten wir uns bei den Beweisen dieses letzten Paragraphen meist recht kurz fassen. Der Dualitätsatz (Satz 23) gilt in derselben Fassung wie in [7], S. 261.

§ 1

R sei ein Ring. Einen l.k. R-Modul mit gröbster linearer Topologie bezeichnen wir als *grob linear kompakt (g.l.k.)*. Wir beginnen mit einer Anzahl einfacher Sätze und Hilfssätze.

(1.1) *Sei $\mathfrak{M}$ ein g.l.k. R-Modul und $\mathfrak{N}$ ein Untermodul. $\mathfrak{M}$ ist genau dann i.e.S.l.k., wenn $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}$ in der durch $\mathfrak{M}$ induzierten Topologie i.e.S.l.k. sind.*

Wegen Satz L5 ist nur zu beweisen, daß die Bedingung hinreicht. Sei $\mathfrak{U}$ ein echter offener Untermodul von $\mathfrak{M}$. Nach Satz L4 ist zu zeigen, daß $\mathfrak{U}$ minimale Obermoduln hat. Das stimmt nach Voraussetzung, falls $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{N} \not\subset \mathfrak{U}$, so ist $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}$ offen, hat also nach Voraussetzung in $\mathfrak{N}$ einen minimalen Obermodul $\mathfrak{Q}$. Offenbar ist dann $\mathfrak{Q} + \mathfrak{U}$ in $\mathfrak{M}$ ein von $\mathfrak{U}$ verschiedener minimaler Obermodul von $\mathfrak{U}$.

Satz 1. *R sei ein grob linear kompakter Ring und $\mathfrak{M}$ ein grob linear kompakter treuer R-Modul. R ist dann und nur dann im engeren Sinne linear kompakt, wenn $\mathfrak{M}$ im engeren Sinne linear kompakt ist.*

Wegen Satz L7 ist nur zu zeigen, daß $\mathfrak{M}$ i.e.S.l.k. ist, falls dieses auch für R zutrifft. Sei $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul von $\mathfrak{M}$. Ist $R(\mathfrak{M}/\mathfrak{U}) = 0$, so ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ eine diskrete Prüfersche Gruppe und hat also minimale Untermoduln, d.h. $\mathfrak{U}$ hat minimale Obermoduln. Ist $R(\mathfrak{M}/\mathfrak{U}) \neq 0$, so gibt es ein $x \in \mathfrak{M}$ mit $Rx \not\subset \mathfrak{U}$. Ist L der Annullator von x modulo $\mathfrak{U}$, so ist Rx modulo $\mathfrak{U}$ zum i.e.S.l.k. und diskreten Faktormodul R/L isomorph und hat also minimale Untermoduln. Somit hat $\mathfrak{U}$ in jedem Falle minimale Obermoduln. Hieraus folgt nach Satz L4 die Behauptung.

Ist R ein Ring mit Einselement 1, so heißt ein R-Modul $\mathfrak{M}$ bekanntlich *unitär*, wenn $1x = x$ gilt für alle x aus $\mathfrak{M}$.

Satz 2. *Sei R ein linear kompakter Ring mit Eins und $\mathfrak{M}$ ein unitärer treuer linear kompakter R-Modul. $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann direkte Summe minimaler Untermoduln, wenn R halbeinfach ist. Die im engeren Sinne linear kompakte Topologie von $\mathfrak{M}$ läßt sich in diesem Falle nicht verfeinern.*

Die letzte Behauptung folgt fast unmittelbar aus (L5). Ist nämlich $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so wird mit $\mathfrak{M}$ auch $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ von minimalen Untermoduln erzeugt. Nach (L5) ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ also direkte Summe endlich vieler minimaler Untermoduln, d.h. in $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ gilt die Minimal- (und natürlich auch die Maximal-) Bedingung. Folglich ist $\mathfrak{M}$ i.e.S.l.k..

a) $\mathfrak{M}$ werde von minimalen Untermoduln erzeugt. Da das Radikal N von R minimale Untermoduln annulliert, folgt $N\mathfrak{M} = 0$, also $N = 0$, d.h. R ist halbeinfach.

b) Sei R halbeinfach. Nach Satz L13 ist R direkte Summe einfacher l.k. Ringe R_i und in der gröbsten l.k. Topologie i.e.S.l.k.. Nach Satz 1 ist dann auch $\mathfrak{M}$ in der gröbsten linearen Topologie i.e.S.l.k.. Der Zerlegung $R = \sum_i R_i$ entspricht eine Zerlegung $\mathfrak{M} = \sum_i \mathfrak{M}_i$ wobei die $\mathfrak{M}_i$ unitäre treue R_i-Moduln sind. Wir können uns also auf den Fall eines einfachen Ringes R beschränken.

R ist voller Endomorphismenring eines Vektormoduls über einem Schiefkörper. Ist e ein unzerlegbares Idempotent aus R, so ist Re ein abgeschlossenes und minimales Linksideal aus R. Ist M ein minimales Linksideal aus R und a ein von 0 verschiedenes Element aus M, so gilt $0 \neq Ra \subset M$, folglich $Ra = M$, M ist also abgeschlossen. Das von den minimalen Linksidealen erzeugte Ideal, der Sockel von R, ist zweiseitig und liegt folglich dicht in R, d.h. R wird von seinen minimalen Linksidealen erzeugt. Nun sei $x \in \mathfrak{M}$ und A der Annullator von x. Mit R wird auch der Faktormodul R/A und wegen $Rx \cong R/A$ folglich auch $\mathfrak{M}$ von minimalen Untermoduln erzeugt.

Es bleibt noch zu beweisen, daß $\mathfrak{M}$ direkte Summe minimaler Untermoduln ist. Hierzu betrachten wir Systeme $Q = \{\mathfrak{Q}\}$ unabhängiger maximaler offener Untermoduln aus $\mathfrak{M}$. Dabei nennen wir die $\mathfrak{Q} \in Q$ unabhängig, wenn für je endlich viele Untermoduln $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_k$ aus Q der Faktormodul $\mathfrak{M} \Big/ \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{Q}_i$ k-gliedrige direkte Summe minimaler Untermoduln ist. Diese „unabhängigen" Systeme Q sind durch „$\subset$" induktiv geordnet. Sei Q unabhängig und $\mathfrak{D} = \bigcap_{\mathfrak{Q} \in Q} \mathfrak{Q}$. Ist $\mathfrak{D} \neq 0$, so wählen wir ein maximales offenes $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{D} \not\subset \mathfrak{Q}$. Ein solches $\mathfrak{Q}$ existiert, da wir schon wissen, daß $\mathfrak{M}$ von minimalen Untermoduln erzeugt wird und da wegen der vor a) gemachten Bemerkung ein offener Untermodul (und damit auch 0) Durchschnitt maximaler offener Untermoduln ist. Sind $\mathfrak{Q}_1$ bis $\mathfrak{Q}_k$ aus Q, so folgt aus $\mathfrak{D} \not\subset \mathfrak{Q}$ erst recht $\bigcap_{1}^{k} \mathfrak{Q}_i \not\subset \mathfrak{Q}$, also $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q} + \bigcap_{1}^{k} \mathfrak{Q}_i$ und somit $\bigcap_{1}^{k} \mathfrak{Q}_i \Big/ \mathfrak{Q} \cap \left(\bigcap_{1}^{k} \mathfrak{Q}_i\right) \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{Q} \neq 0$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{M}/\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_k$ $k+1$-gliedrige direkte Summe sein muß. Folglich ist $Q \cup \{\mathfrak{Q}\}$ unabhängig. Sei nun Q_0 ein maximales unabhängiges System. Nach unserer Überlegung ist dann $\bigcap_{\mathfrak{Q} \in Q_0} \mathfrak{Q} = 0$.

Wir indizieren die $\mathfrak{Q} \in Q_0$ mit den Elementen μ einer Menge I und setzen $\mathfrak{M}_\mu = \mathfrak{M}/\mathfrak{Q}_\mu$ für $\mathfrak{Q}_\mu \in Q_0$. Mit x_μ bezeichnen wir die Restklasse von x aus $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}_\mu$. Durch

$$x \to \varphi(x) = \sum_{\mu} x_\mu \in \sum_{\mu} \mathfrak{M}_\mu = \widetilde{\mathfrak{M}}$$

ist dann ein Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}$ definiert, dessen Kern verschwindet: $\varphi(x) = 0$ bedeutet $x \in \mathfrak{Q}_\mu$ für alle $\mu \in I$, also $x = 0$. Um zu beweisen, daß φ ein Isomorphismus *auf* $\widetilde{\mathfrak{M}}$ ist, müssen wir zeigen, daß zu endlich vielen vorgeschriebenen $x_{\mu_i} \subset \mathfrak{M}_{\mu_i}$ ein $x \in \mathfrak{M}$ existiert, so daß die μ_i-te Komponente von $\varphi(x)$ gleich x_{μ_i} ist. Wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}_{\mu_i} + \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{Q}_{\mu_j}$ gibt es ein $x_i \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{Q}_{\mu_j}$ mit $x_i + \mathfrak{Q}_{\mu_i} = x_{\mu_i}$. Die Summe dieser x_i genügt offenbar der an x gestellten Bedingung. φ ist stetig und da alle auftretenden Moduln i.e.S.l.k. sind, sogar topologisch. Damit ist alles bewiesen.

Einige Folgerungen aus Satz 2:

(1.2) *Ein unitärer l.k. Modul über einem halbeinfachen l.k. Ring R ist direkte Summe minimaler Untermoduln. Ist R einfach, so sind alle minimalen Untermoduln isomorph zu den minimalen Linksidealen aus R.*

Die letzte Behauptung folgt leicht aus der unter b) im Beweis von Satz 2 vorkommenden Isomorphie $Rx \cong R/A$. (1.2) verallgemeinert den Hauptsatz über l.k. Vektorräume aus [5], S. 83.

(1.3) *Ein von seinen minimalen Untermoduln erzeugter l.k. Modul ist sogar direkte Summe minimaler Untermoduln.*

Der Ring der hyperstetigen Endomorphismen des Moduls ist nämlich halbeinfach.

(1.4) *Ein halbeinfacher l.k. Ring R ist stets i.e.S.l.k..*

R enthält eine Eins und ist deshalb unitärer R-Modul.

(1.5) *Ein g.l.k. Ring R ist genau dann i.e.S.l.k., wenn sein Radikal N i.e.S.l.k. ist.*

Nach (1.4) ist nämlich R/N stets i.e.S.l.k.. Anwendung von (1.1) ergibt dann (1.5).

Wir definieren die absteigende Kette von zweiseitigen im Radikal N des l.k. Ringes R liegenden Idealen $N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_\lambda \supset \cdots$ wie in [8], S. 253.

(1.6) *Ist $N_{\lambda+1} = 0$ und R/N_λ in der gröbsten linearen Topologie i.e.S.l.k., so ist auch R in der gröbsten Topologie i.e.S.l.k..*

Sei R g.l.k.; $N_{\lambda+1} = 0$ bedeutet $N_\lambda \cdot N = 0$, N ist also ein l.k. R/N_λ-Modul. Aus Satz L3 und Satz 1 folgt, daß N i.e.S.l.k. ist. Nach (1.5) ist also auch R i.e.S.l.k.

Wir werden nun die in [8] definierten Ideale N_* und ${}_*N$ eines l.k. Ringes R untersuchen.

Satz 3. *Sei R ein linear kompakter Ring und N sein Radikal. N_* ist das kleinste zweiseitige Ideal, für das der Restklassenring in der gröbsten linearen Topologie im engeren Sinne linear kompakt ist. N_* ist überdies der Durchschnitt aller abgeschlossenen Linksideale, deren grob linear kompakte Faktormoduln im engeren Sinne linear kompakt sind.*

Beweis. R/N ist i.e.S.l.k.. Ist R/N_μ in der g.l.k. Topologie i.e.S.l.k., so ist $R/N_{\mu+1}$ nach (1.6) ebenfalls in der g.l.k. Topologie i.e.S.l.k.. Ist λ Limeszahl und sind alle R/N_μ für $\mu < \lambda$ i.e.S.l.k., so R/N_λ als projektiver Limes der R/N_μ ebenfalls. Folglich ist R/N_* in der gröbsten linearen Topologie i.e.S.l.k.. Sei A ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal und $R' = R/A$ i.e.S.l.k.. $N' = (N+A)/A$ ist nach Satz L14 das Radikal von R' und nach Satz L9 ist $N'_* = 0$. Wir setzen $M' = (N_* + A)/A$. Aus

$$\overline{(N_* + A)(N + A)} + A = \overline{N_* \cdot N} + A = N_* + A$$

folgt $M'N' = M'$ und folglich $M' \subset N'_* = 0$, d.h. $N_* \subset A$. Sei nun L ein abgeschlossenes Linksideal und R/L i.e.S.l.k.. Ist A der Annullator von R/L, so ist R/A in der g.l.k. Topologie sogar i.e.S.l.k. und folglich gilt

$$N_* = \overline{N_* \cdot N} \subset \overline{N_* R} \subset \overline{AR} \subset L.$$

Folgerungen:

(1.7) *Ein g.l.k. Ring R ist dann und nur dann i.e.S.l.k., wenn sein Radikal r-nilpotent ist.*

(1.8) *Ist $\mathfrak{M}$ ein g.l.k. R-Modul, so ist die Vereinigung aller i.e.S.l.k. Untermoduln ein maximaler i.e.S.l.k. Untermodul $\mathfrak{M}^*$ von $\mathfrak{M}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{M}_*$ aller Untermoduln, deren Faktormoduln in der gröbsten linearen Topologie i.e.S.l.k. sind, ist der kleinste Untermodul, für den $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_*$ in der g.l.k. Topologie i.e.S.l.k. ist. Ist N das Radikal von R, so ist*

$$\mathfrak{M}^* = \{x \mid N_* x = 0,\ x \in \mathfrak{M}\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_* = \overline{N_* \mathfrak{M}}.$$

Beweis. $\mathfrak{M}^* = \{x \mid N_* x = 0\}$ ist ein R/N_*-Modul, nach Satz 2, Satz 3 und Satz L3 also i.e.S.l.k.. Ist $\mathfrak{A}$ ein i.e.S.l.k. Untermodul von $\mathfrak{M}$ und $A \subset R$ der Annullator von $\mathfrak{A}$, so ist R/A nach Satz L7 i.e.S.l.k., nach Satz 3 liegt N_* also in A, d.h. $N_* \mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}^*$. Damit ist der erste Teil von (1.8) bewiesen.

Ist $\mathfrak{M}_* = \overline{N_* \mathfrak{M}}$, so ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_*$ ein R/N_*-Modul, also in der gröbsten Topologie i.e.S.l.k.. Ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ i.e.S.l.k., so muß wieder wegen Satz 3 und Satz L7 N_* im Annullator von $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ liegen, d.h. es ist $N_* \mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}$, also $\mathfrak{M}_* \subset \mathfrak{A}$. Damit ist (1.8) in allen Teilen bewiesen.

Satz 4. *Ist R ein linear kompakter Ring mit dem Radikal N, so ist entweder*

$$ {}_*N = N_* = N_k \quad \textit{für ein } k < \omega = \textit{erste transfinite Ordinalzahl}$$

oder es gilt die Formel

$$ {}_*N + N_* = N_\omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{N^i}.$$

Beweis. Ist $N_* = N_k$, $k < \omega$, so ist $\overline{N \cdot {}_k N} = \overline{N^{k+1}} = N_k = {}_k N$, also ${}_* N = {}_k N = N_k$. Genauso folgt $N_* = N_k$ aus ${}_* N = {}_k N$. Die zweite Formel des Satzes ist natürlich auch in diesem Falle richtig. Um sie allgemein zu beweisen, sei R zunächst i.e.S.l.k., d.h. $N_* = 0$. Wir müssen dann ${}_* N = N_\omega$ beweisen. Ist L ein offenes Linksideal, so gilt in R/L die Minimalbedingung und aus (L3) folgt also

$$ {}_\omega N + L = \bigcap_{i<\omega} (N^i + L) = N^k + L$$

für alle $k \geqq n_0(L)$. Daraus folgt dann weiter

$$ {}_{\omega+1} N + L = N \cdot N^k + L = N^{k+1} + L = {}_\omega N + L,$$

also, da L beliebig war: ${}_{\omega+1} N = {}_\omega N = {}_* N$ wie behauptet.

Wir erhalten die Gültigkeit der Formel aus Satz 4 im allgemeinen Fall aus dem eben behandelten Spezialfall, indem wir modulo N_* rechnen. Da nach Satz 3 der Restklassenring R/N_* in der gröbsten Topologie i.e.S.l.k. ist, gilt wegen $N_* \subset N_\omega$ die Formel

$$ \overline{N \cdot {}_\omega N} + N_* = N_\omega, \quad \text{d.h.} \quad {}_{\omega+1} N + N_* = N_\omega.$$

Die gewohnten Induktionsschlüsse führen nun wie üblich zur Behauptung von Satz 4, der damit bewiesen ist.

Wegen (1.7) haben wir als Folgerung:

(1.9) *Ist R i.e.S.l.k., so ist ${}_* N = N_\omega$.*

Etwas allgemeiner folgt aus Satz 4:

(1.10) *Liegt* N_* *in* ${}_{\omega+1}N$, *so ist* ${}_*N = N_\omega$.

Aus ${}_*N \subset {}_{\omega+1}N$ und $N_* \subset {}_{\omega+1}N$ folgt dann nämlich ${}_{\omega+1}N = {}_\omega N = {}_*N$. Umgekehrt folgt aus ${}_*N \subset N_{\omega+1}$ natürlich genauso $N_* = N_\omega$.

(1.11) *In kommutativen l.k. Ringen ist* $N_* = N_\omega$.

Denn in ihnen ist ${}_*N = N_*$, also $N_* = {}_*N + N_* = N_\omega$.

Der Ring R sei von nun an i.e.S.l.k. und N sei sein Radikal. Wir bezeichnen die kleinste Ordnungszahl τ mit $N_\tau = 0$ als den *Index* von N, bzw. von R (vgl. [4], p. 306). Diesen Index wollen wir nun bestimmen.

Ist $\mathfrak{M}$ ein diskreter i.e.S.l.k. Modul, so sei ${}^0\mathfrak{M} = 0$. Ist ${}^\mu\mathfrak{M}$ schon als Untermodul von $\mathfrak{M}$ definiert, so sei ${}^{\mu+1}\mathfrak{M}$ das Erzeugnis aller minimalen Obermoduln von ${}^\mu\mathfrak{M}$. Ist ${}^\mu\mathfrak{M}$ für alle $\mu < \lambda =$ Limeszahl definiert, so sei ${}^\lambda\mathfrak{M} = \bigcup_{\mu<\lambda} {}^\mu\mathfrak{M}$. Die kleinste Ordnungszahl σ mit ${}^\sigma\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ nennen wir die *Schichtzahl* von $\mathfrak{M}$. Als Schichtzahl eines beliebigen i.e.S.l.k. Moduls bezeichnen wir die obere Grenze der Schichtzahlen seiner diskreten Faktormoduln.

(1.12) *Sei* $\mathfrak{A}$ *ein diskreter Modul,* S *ein topologischer Operatorenring von* $\mathfrak{A}$ *und die Abbildung* $(s, a) \to sa$ *von* $S \times \mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{A}$ *stetig. Ist* L *ein Linksideal aus* S, $\bar{L}$ *die abgeschlossene Hülle von* L *und* $\mathfrak{U}$ *ein Untermodul von* $\mathfrak{A}$, *so ist* $L\mathfrak{U} = \bar{L}\mathfrak{U}$.

Sei $\sum \bar{a}_i u_i \in \bar{L}\mathfrak{U}$. Der Annullator H_i von u_i ist in S offen, es existiert also ein $a_i \in L$ mit $a_i \equiv \bar{a}_i \pmod{H_i}$ und folglich $a_i u_i = \bar{a}_i u_i$, d.h. $\sum \bar{a}_i u_i = \sum a_i u_i \in L\mathfrak{U}$.

(1.13) *Sei* R *ein i.e.S.l.k. Ring mit Eins und Radikal* N. *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein i.e.S.l.k. diskreter unitärer treuer* R*-Modul, so gilt für alle* μ:

$$^\mu\mathfrak{M} = \{x \mid N_\mu x = 0\}. \quad (N_0 = R!).$$

Wir setzen für den Beweis $\mathfrak{M}_\mu = \{x \mid N_\mu x = 0\}$. Die Behauptung stimmt für $\mu = 0$, wir nehmen an, sie sei richtig für $\varkappa$. Aus $N\,{}^{\varkappa+1}\mathfrak{M} \subset {}^\varkappa\mathfrak{M}$ folgt dann wegen (1.12):

$$N_{\varkappa+1}\,{}^{\varkappa+1}\mathfrak{M} = N_\varkappa \cdot N\,{}^{\varkappa+1}\mathfrak{M} \subset N_\varkappa\,{}^\varkappa\mathfrak{M} = 0,$$

also ${}^{\varkappa+1}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_{\varkappa+1}$. Umgekehrt liegt $\mathfrak{M}_{\varkappa+1}$ auch in ${}^{\varkappa+1}\mathfrak{M}$, denn aus $N(\mathfrak{M}_{\varkappa+1}/{}^\varkappa\mathfrak{M}) = 0$ folgt nach Satz 2, daß $\mathfrak{M}_{\varkappa+1}$ modulo ${}^\varkappa\mathfrak{M}$ von minimalen Untermoduln erzeugt wird. Ist nun ${}^\mu\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\mu$ für alle $\mu < \lambda =$ Limeszahl, so folgt $N_\lambda\,{}^\lambda\mathfrak{M} = N_\lambda\left(\bigcup_{\mu<\lambda} {}^\mu\mathfrak{M}\right) = 0$, also ${}^\lambda\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_\lambda$. Ist $x \in \mathfrak{M}_\lambda$, so ist $N_\lambda x = \bigcap_{\mu<\lambda} N_\mu x = 0$; da $\mathfrak{M}$ i.e.S.l.k. ist, muß also $N_\mu x = 0$ für ein $\mu < \lambda$ sein, d.h. $x \in \mathfrak{M}_\mu = {}^\mu\mathfrak{M} \subset {}^\lambda\mathfrak{M}$. Folglich ist auch hier ${}^\lambda\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\lambda$, (1.13) gilt deshalb für alle μ.

Satz 5. *Ist* R *ein im engeren Sinne linear kompakter Ring mit Eins, und* $\mathfrak{M}$ *ein unitärer treuer im engeren Sinne linear kompakter* R*-Modul, so ist der Index von* R *gleich der Schichtzahl von* $\mathfrak{M}$.

Der Beweis folgt für diskretes $\mathfrak{M}$ unmittelbar aus (1.13). Sei τ der Index, N das Radikal von R und σ die Schichtzahl von $\mathfrak{M}$. Ist A ein zweiseitiges

abgeschlossenes Ideal aus R, so zeigt man wie üblich $\big((N+A)/A\big)_\mu = (N_\mu + A)/A$ für alle μ. Ist $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul von $\mathfrak{M}$ und $C = C_\mathfrak{U}$ der Annullator des diskreten Faktormoduls $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$, so gilt insbesondere $\big((N+C)/C\big)_\tau = 0$, wegen (1.13) ist also die Schichtzahl von $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ höchstens gleich τ, d.h. es ist $\sigma \leqq \tau$. Umgekehrt folgt aus (1.13) und Satz L 14 aber auch $\big((N+C)/C\big)_\sigma = 0$, also $N_\sigma + C = C$, d.h. $N_\sigma < C$ und somit $N_\sigma < \bigcap_\mathfrak{U} C_\mathfrak{U} = 0$, $N_\sigma = 0$, $\tau \leqq \sigma$. Damit ist Satz 5 bewiesen. Folgerung:

(1.14) *Für einen i.e.S.l.k. Ring mit Eins stimmen Index und Schichtzahl überein.*

Denn der Ring ist ein unitärer i.e.S.l.k. Modul mit sich selbst als Operatorenring und verschwindendem Annullator. Daß man in (1.14) auf die Existenz der Eins nicht verzichten kann, zeigt jeder endliche Zeroring.

Wir haben in [8] bewiesen, daß das Radikal eines l.k. Ringes stets abgeschlossen ist. In Wirklichkeit zeigt der Beweis zu Satz L 8 aber mehr, nämlich:

(1.15) *Die Menge der links-quasiregulären Elemente eines l.k. Ringes ist abgeschlossen.*

Hieraus folgt bekanntlich die Abgeschlossenheit des Radikals. Wir können (1.15) nun auch unmittelbar aus dem folgenden für beliebige l.t. Ringe gültigen Kriterium erhalten:

Satz 6. *Die Menge Q der links-quasiregulären Elemente eines linear topologischen Ringes S ist abgeschlossen, falls folgende Bedingung erfüllt ist: Für jedes nicht links-quasireguläre Element $a \in S$ ist die abgeschlossene Hülle des Ideals $X(a) = \{x - xa\}_{x \in S}$ von S verschieden.*

Da für l.k. Ringe $X(a) = \overline{X(a)}$ ist, folgt (1.15) aus diesem Kriterium. Sei nun für S die Bedingung von Satz 6 erfüllt, $\bar{a} \in \overline{Q}$ und L ein offenes Linksideal aus S. Es existiert ein $a \in Q$ mit $a \equiv \bar{a} \pmod{L}$, also $x - xa = x - x\bar{a} \pmod{L}$ für alle $x \in S$, d.h. es ist

$$S = X(a) < X(\bar{a}) + L, \qquad S = X(\bar{a}) + L$$

für alle offenen Linksideale L. Hieraus folgt $\overline{X(\bar{a})} = S$, $\bar{a}$ muß also links-quasiregulär sein, d.h. $\overline{Q}$ liegt in Q und somit ist $Q = \overline{Q}$ abgeschlossen.

Zum Schluß dieses Paragraphen noch eine Bemerkung, deren Beweis wir dem Leser überlassen:

(1.16) *Ist R i.e.S.l.k. und N das Radikal, so ist jedes zweiseitige Erzeugendensystem von N modulo N_2 auch ein zweiseitiges Erzeugendensystem von N.*

Hierbei heißt eine Teilmenge $E < R$ zweiseitiges Erzeugendensystem des zweiseitigen Ideals $A < R$, falls A das kleinste abgeschlossene E enthaltende zweiseitige Ideal aus R ist. Aus (1.16) folgt z.B.: Ein i.e.S.l.k. kommutativer Integritätsbereich R mit Radikal N, offenem N_2 und für den $\Gamma = R/N$ ein Körper der Charakteristik 0 ist, ist isomorph zu einem Ring aller formalen Potenzreihen in endlich vielen Unbestimmten über Γ.

§ 2

Wir haben uns in unseren Untersuchungen bisher nicht um Existenzfragen gekümmert, es könnte also durchaus sein, daß ein Teil unserer Ergebnisse aus leeren Aussagen besteht, daß etwa z.B. gar keine i.e.S.l.k. Ringe mit einem Index größer als ω existieren. Wir wissen auch nicht, ob das Radikal eines l.k. Ringes nicht stets nilpotent ist. Um derartige Fragen beantworten zu können, werden wir nun eine umfangreiche Klasse l.k. Ringe konstruieren, die uns zeigen wird, daß manche unserer Ergebnisse in gewissem Sinne optimal sind: Wir werden z.B. sehen, daß jede Ordnungszahl als Index eines i.e.S.l.k. Ringes vorkommt und daß das Radikal eines l.k. Ringes nicht immer nilpotent ist.

Im folgenden sei I stets eine total geordnete Menge und $\tilde{I}$ die vollständige Erweiterung von I, d.h. im wesentlichen die Menge der Schnitte von I. R_0 sei ein l.k. Ring und zu jedem $i \in I$ sei ein diskreter l.k. R_0-Modul P_i gegeben. Für ein Element $x = \sum_{i \in I} x_i$ der vollständigen direkten Summe aller P_i sei stets $\chi(x)$ die geordnete Menge der Indizes i aus I, für die $x_i \neq 0$ ist. Ist α eine geordnete Menge, bzw. ein Ordnungstyp, so bezeichnen wir mit α^* immer die invers geordnete Menge, bzw. den zu einer invers geordneten Menge gehörenden Ordnungstyp. So ist ω^* z.B. der Ordnungstyp der negativen ganzen Zahlen in der natürlichen Ordnung.

Sei ι der Ordnungstyp von I. Die *ι-induktive direkte Summe* der P_i, $i \in I$, ist der R_0-Modul

$$\mathfrak{M} = \mathbf{S}_\iota P_i$$

aller Elemente $x = \sum x_i$ der vollständigen direkten Summe der P_i, für welche $\chi(x)^*$ wohlgeordnet ist. Für jedes $x \in \mathfrak{M}$ enthält $\chi(x)$ dann einen maximalen Index, den wir mit $|x|$ bezeichnen. Der *Kopf* des Elementes $x = \sum x_i \in \mathfrak{M}$ ist der Summand $x_{|x|}$, d.h. der Summand mit maximalem Index. Für $k \in \tilde{I}$ seien Untermoduln $\mathfrak{V}_k$ und $\mathfrak{U}_k$ definiert durch

$$\mathfrak{V}_k = \{x \mid |x| < k\}; \qquad \mathfrak{U}_k = \{x \mid |x| \leqq k\}.$$

Für $k \notin I$ ist $\mathfrak{V}_k = \mathfrak{U}_k$, sonst $\mathfrak{V}_k = \mathfrak{U}_k + P_k$. Für $k \notin I$ hat $\mathfrak{V}_k$ keinen minimalen Obermodul. Mit $\boldsymbol{B}$ bezeichnen wir den aus den Untermoduln $\mathfrak{V}_k$, $\mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{V}_k + Z_k$ mit R_0-invariantem Untermodul $Z_k \subset P_k$ (für $k \in I$) gebildeten Filter und R sei der Ring aller bezüglich $\boldsymbol{B}$ hyperstetigen Endomorphismen von $\mathfrak{M} = \mathbf{S}_\iota P_i$. R enthält in natürlicher Weise R_0 und die Projektionen π_i von $\mathfrak{M}$ auf die Summanden P_i. Schließlich bezeichnen wir für $i, j \in I$, $i < j$, mit Θ_{ji} den Bereich aller Homomorphismen von P_j in P_i. Nun machen wir die

Voraussetzung Θ. Für alle i und j aus I mit $i < j$ und jedes $x \neq 0$ aus P_j ist $P_i = x\Theta_{ji}$.

Satz 7. *Unter der Voraussetzung Θ ist die induktive direkte Summe $\mathfrak{M}$ der P_i, $i \in I$, in der diskreten Topologie ein linear kompakter R-Modul.*

Sei $i \in I$, $x_i \neq 0$ aus P_i und $z = \sum_{j<i} z_j \in \mathfrak{V}_i$. Wegen Θ existiert zu jedem Summanden $z_j \neq 0$ ein Homomorphismus ϑ_{ij} von P_i in P_j mit $x_i \vartheta_{ij} = z_j$.

Ist $y = \sum y_k \in \mathfrak{M}$, so ist durch $y \to \sum_{j<i} y_i \vartheta_{ij}$ (Summe über j!) mit den eben betrachteten ϑ_{ij} ein Homomorphismus ϑ von $\mathfrak{M}$ definiert, der offensichtlich bezüglich $\boldsymbol{B}$ hyperstetig ist und deshalb zu R gehört. Ferner gilt nach Konstruktion $x_i\vartheta = z \in \mathfrak{V}_i$. Da z beliebig war, folgt $\mathfrak{V}_i \subset (x_i)$, wobei wie üblich (x_i) den von x_i erzeugten R-Untermodul von $\mathfrak{M}$ bezeichne. Sei nun $\mathfrak{W}$ ein beliebiger R-Untermodul von $\mathfrak{M}$. Sind die $|x|$ für $x \in \mathfrak{W}$ in I nicht beschränkt, so folgt aus unserer Überlegung $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{V}_i = \mathfrak{M} \subset \mathfrak{W}$, d.h. $\mathfrak{W} = \mathfrak{M}$. Wir können also annehmen, daß die $|x|$ in I beschränkt sind. Dann existiert in $\tilde{I}$ die obere Grenze m der $|x|$, $x \in \mathfrak{W}$. Zu $i < m$ gibt es dann ein $k \in I$ mit $i < k \leqq m$ und ein $x \in \mathfrak{W}$ mit $|x| = k$. Hiermit gilt folglich

$$\mathfrak{V}_i \subset \mathfrak{V}_k \subset (\pi_k x) \subset (x) \subset \mathfrak{W}, \qquad \text{d.h. aber} \qquad \mathfrak{V}_m \subset \mathfrak{W}.$$

Liegt m in I, so gilt nach Definition von m:

$$\mathfrak{V}_m \subset \mathfrak{W} \subset \mathfrak{V}_m + P_m = \mathfrak{U}_m,$$

also (die Projektion π_m liegt in R!) $\mathfrak{W} = \mathfrak{V}_m + Z_m$ mit $Z_m \in P_m$, d.h. $\mathfrak{W} \in \boldsymbol{B}$. Ist $m \notin I$, so ist für $x \in \mathfrak{W}$ stets $|x| < m$ und folglich $x \in \mathfrak{V}_m$, d.h. $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{V}_m$, also $\mathfrak{W} = \mathfrak{V}_m \in \boldsymbol{B}$. Damit ist gezeigt:

(2.1) *Die Moduln aus* $\boldsymbol{B}$ *sind die einzigen* R*-invarianten Untermoduln von* $\mathfrak{M}$.

Nun sei $\boldsymbol{A}_1 = \{x_\mu + \mathfrak{A}_\mu\}$ ein Filter von Restklassen R-invarianter Untermoduln $\mathfrak{A}_\mu$. Wir sagen, ein Untermodul $\mathfrak{A}$ *gehört zu* $\boldsymbol{A}_1$, falls $\boldsymbol{A}_1$ eine Restklasse von $\mathfrak{A}$ enthält. Wir können annehmen, daß mit jedem zu $\boldsymbol{A}_1$ gehörenden Untermodul auch alle Obermoduln in $\mathfrak{M}$ zu $\boldsymbol{A}_1$ gehören. Wir ersetzen $\boldsymbol{A}_1$ durch einen äquivalenten Filter $\boldsymbol{A}_2$, indem wir alle Restklassen $x_\mu + \mathfrak{A}_\mu$ aus $\boldsymbol{A}_1$ fortlassen, für welche $\mathfrak{A}_\mu$ einen zu $\boldsymbol{A}_1$ gehörenden Untermodul $\mathfrak{U}_i \in \boldsymbol{B}$ enthält. Es gibt nun zwei Fälle:

1. Nicht alle zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörenden Untermoduln haben die Form $\mathfrak{U}_i$. Dann gibt es einen zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörenden Untermodul $\mathfrak{A}$, der nach (2.1) die Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{V}_k + Z_k, \qquad Z_k \in P_k, \qquad k \in I,$$

oder die Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{V}_k, \qquad k \notin I,$$

hat. $\mathfrak{V}_k$ kann keinen zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörenden echten Untermodul $\mathfrak{B}$ enthalten; ein solcher hätte nämlich die Form $\mathfrak{V}_i$, bzw. $\mathfrak{V}_i + Z_i$ mit $i < k$. Es gäbe dann ein $j \in I$ mit $i \leqq j < k$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}_j \subset \mathfrak{V}_k \subset \mathfrak{A}$, d.h. $\mathfrak{U}_j$ würde zu $\boldsymbol{A}_2$ gehören und in $\mathfrak{A}$ liegen, was der Voraussetzung über $\mathfrak{A}$ widerspräche. Somit liegt $\mathfrak{V}_k$ in allen zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörenden Untermoduln. Für $k \notin I$ folgt, daß dann $\mathfrak{V}_k = \mathfrak{A}$ der kleinste zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörende Untermodul ist, so daß $\downarrow \boldsymbol{A}_2 = \downarrow \boldsymbol{A}_1 = x + \mathfrak{A}$ ist. Für $k \in I$ bilden die Restklassen der zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörenden in $\mathfrak{U}_k$ enthaltenen Untermoduln einen zu $\boldsymbol{A}_2$ äquivalenten Filter $\boldsymbol{A}_3$. Ist $x + \mathfrak{A} \in \boldsymbol{A}_3$, so liegen alle Restklassen des Filters $\boldsymbol{A}_3' = \{x_\mu - x + \mathfrak{A}_\mu\}_{x_\mu + \mathfrak{A}_\mu \in \boldsymbol{A}_3}$ in $\mathfrak{U}_k$ und alle $\mathfrak{A}_\mu$ enthalten $\mathfrak{V}_k$. Da $\mathfrak{U}_k/\mathfrak{V}_k \cong P_k$ und P_k l.k. ist, muß dann $\downarrow \boldsymbol{A}_1 = \downarrow \boldsymbol{A}_2 = \downarrow \boldsymbol{A}_3 = x + \downarrow \boldsymbol{A}_3' \neq \emptyset$ sein.

2. Alle zu $\boldsymbol{A}_2$ gehörenden Untermoduln haben die Form $\mathfrak{U}_i$. Sei J eine konfinale invers wohlgeordnete Teilmenge der Menge aller Indizes i, für welche $\mathfrak{U}_i$ zu $\boldsymbol{A}_2$ gehört. Der Filter $\boldsymbol{A}_3$ aller Restklassen $x_i+\mathfrak{U}_i \in \boldsymbol{A}_2$ mit $i \in J$ ist dann zu $\boldsymbol{A}_2$ äquivalent. Sind $x_i+\mathfrak{U}_i$ und $x_j+\mathfrak{U}_j$ aus $\boldsymbol{A}_3$, $k \in I$ und $i, j < k$, so ist $\pi_k x_i = \pi_k x_j = x^k$ durch $\boldsymbol{A}_3$ eindeutig bestimmt. Wir behaupten: Die Menge W aller Indizes k mit $x^k \neq 0$ ist invers wohlgeordnet. Das ist richtig für leeres W. Falls $W \neq \emptyset$, sei T eine nicht leere Teilmenge aus W. Es ist zu zeigen, daß T einen maximalen Index enthält. Wir wählen ein $j \in T$. Es gibt ein $i < j$ mit $x_i+\mathfrak{U}_i \in \boldsymbol{A}_3$ und $\pi_j x_i = x^j \neq 0$. Die $k \in T$ mit $k \geqq j$ sind dann Indizes von 0 verschiedener Komponenten des Elementes x_i, also invers wohlgeordnet. Folglich enthält T einen maximalen Index und W ist invers wohlgeordnet. Nach Definition von $\mathfrak{M}$ liegt dann $x = \sum_{i \in W} x^i$ in $\mathfrak{M}$ und aus $\pi_j x = \pi_j x_i$ für $i < j$, $x_i + \mathfrak{U}_i \in \boldsymbol{A}_3$, folgt: $x \in \downarrow \boldsymbol{A}_3$, also $\downarrow \boldsymbol{A}_1 = \downarrow \boldsymbol{A}_3 \neq \emptyset$. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Aus Satz 7 und Satz L7 folgt:

(2.2) *Der Ring R der $\boldsymbol{B}$-hyperstetigen Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ ist linear kompakt.*

Die Voraussetzungen von Satz 7 sind z.B. erfüllt, wenn die P_i Vektormoduln $\mathfrak{V}_i$ positiver Dimension über einem festen Schiefkörper Δ sind. Für R_0 kann man etwa die direkte Summe $\sum R_i$ der vollen Endomorphismenringe der $\mathfrak{V}_i$ nehmen, mit der Festsetzung: $R_i \mathfrak{V}_j = 0$ für $i \neq j$, R_i wirkt als Endomorphismenring auf $\mathfrak{V}_i$. Sind alle $\mathfrak{V}_i$ isomorph, d.h. haben alle $\mathfrak{V}_i$ dieselbe Dimension über Δ, so hängt die Struktur des Ringes R aller hyperstetigen Endomorphismen von $\mathfrak{M} = \boldsymbol{S}_\iota \mathfrak{V}_i$ nur ab vom Schiefkörper Δ, der Dimension $\mathfrak{d}$ der $\mathfrak{V}_i$ und dem Ordnungstyp ι von I. Wir bezeichnen R in diesem Falle mit dem Symbol $\Delta_{(\mathfrak{d}, \iota)}$. Für $\iota = 1$ ist $\Delta_{(\mathfrak{d}, 1)} = \Delta_{(\mathfrak{d})}$ voller Matrixring vom Grade $\mathfrak{d}$ mit Elementen aus Δ. Nach (2.2) ist $\Delta_{(\mathfrak{d}, \iota)}$ stets ein l.k. Ring. Wie stark die Struktur dieses Ringes von ι abhängt, werden wir im folgenden sehen. Wir erinnern dazu an einige Begriffsbildungen aus der Theorie der Ordnungstypen: Ist α ein Ordnungstyp, A eine total geordnete Menge vom Typ α, für jedes $i \in A$, B_i eine total geordnete Menge vom Ordnungstyp β_i und sind die B_i paarweise fremd, so ist $\sigma = \sum_\alpha \beta_i$ der Ordnungstyp der in folgender Weise geordneten Vereinigung $B = \bigcup_i B_i$: Sind x und y aus B, so bedeute $x < y$, daß $x \in B_i$, $y \in B_j$ und $i < j$ oder, falls $x, y \in B_i$, daß $x < y$ in B_i ist. Sind alle $\beta_i = \beta$, so ist $\sigma = \alpha\beta$ das Produkt von α und β. Sind α und alle β_i Ordnungszahlen, so ist auch σ eine Ordnungszahl. Ein Ordnungstyp α heißt *Teil* eines Ordnungstyps β, wenn eine β-geordnete Menge eine α-geordnete Teilmenge enthält. So ist z.B. der Ordnungstyp der Menge der rationalen Zahlen Teil des Typs der reellen Zahlen. Der Ordnungstyp δ der Menge D heißt *dicht*, wenn D dicht ist, d.h. wenn zu $x, y \in D$ mit $x < y$ ein $z \in D$ mit $x < z < y$ existiert. Mit δ ist natürlich auch δ^* dicht.

Sämtliche Endomorphismen γ der ι-induktiven direkten Summe $\mathfrak{M} = \boldsymbol{S}_\iota P_i$ mit $|\gamma x| < |x|$ für alle $x \in \mathfrak{M}$ bilden ein abgeschlossenes zweiseitiges

Ideal C_ι des Endomorphismenringes R, und zwar ist C_ι stets Unterideal des Radikals. Wir nennen C_ι das *charakteristische Ideal* des Ringes der hyperstetigen Endomorphismen der ι-induktiven direkten Summe der P_i. Ist die Indexmenge I Vereinigung paarweise fremder nicht leerer Teilmengen I_t mit der Eigenschaft, daß mit $i, j \in I_t$ auch alle $k \in I$ zwischen i und j zu I_t gehören, so bilden die I_t selbst eine geordnete Menge $J = \{I_t\}$, deren Ordnungstyp $\varkappa$ Teil von ι ist. Setzen wir $S_t = \mathbf{S}_{i \in I_t} P_i$, so ist offenbar auch

$$(v) \qquad \mathfrak{M} = \mathbf{S}_\varkappa S_t.$$

Wir sagen, die Darstellung (v) von $\mathfrak{M}$ als $\varkappa$-induktive Summe der S_t sei eine *Vergröberung* der ι-induktiven Summe der P_i. Die Vergröberung (v) hängt dabei nicht nur vom Ordnungstyp $\varkappa$ ab, sondern von der Zerlegung $J = \{I_t\}$ von I in fremde Teilmengen. Zur Vergröberung (v) gehört wieder ein charakteristisches Ideal $C_\varkappa$, das im allgemeinen echt in C_ι enthalten sein wird. Für $x \in \mathfrak{M}$ sei $|x|$ der maximale Index der zur Vergröberung (v) gehörigen Indexmenge $\chi(x)$. $|x| = |y|$ gilt also genau dann, wenn $|x|$ und $|y|$ in derselben Teilmenge I_t liegen. Definieren wir

$$\mathfrak{U}_t^{(v)} = \{x \mid |x| \leq t\}, \qquad \mathfrak{V}_t^{(v)} = \{x \mid |x| < t\},$$

so gilt für jeden Index t

$$(\varkappa) \qquad \mathfrak{V}_t^{(v)} = C_\varkappa \mathfrak{U}_t^{(v)}.$$

Die Vergröberung (v) heißt *dicht*, falls $\varkappa$ dicht ist.

Jede Teilmenge T von $\tilde{I}$ definiert in folgender Weise eine Vergröberung $v(T)$ von $\mathfrak{M}$: Jedes $i \in I$ bestimmt in T die Unterklasse $U_t = U_t(i)$ aller Elemente $s \in T$ mit $s \leq i$. Alle i, die dasselbe U_t bestimmen, bilden die Teilmenge $I_t \subset I$. Diese I_t sind durch T eindeutig bestimmt und erfüllen offenbar alle zu einer Vergröberung $v(T)$ notwendigen Bedingungen. Man sieht auch leicht, daß $v(T)$ genau dann dicht ist, falls T dicht ist und daß $v(T)$ und T im Falle $T \subset I$ denselben Ordnungstyp haben.

Von nun an setzen wir voraus, daß die Summanden P_i der induktiven Summe $\mathfrak{M} = \mathbf{S} P_i$ sämtlich irreduzibel seien. P_i ist dann Vektormodul über einem Schiefkörper Δ_i und $\pi_i R \pi_i$ ist der Ring aller Δ_i-linearen Transformationen von P_i; π_i ist hierbei wie üblich die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf P_i. Unser nächstes Ziel ist der Beweis von

Satz 8. *Ist $\mathfrak{M} = \mathbf{S}_\iota P_i$ die ι-induktive direkte Summe der irreduziblen Moduln P_i und R der linear kompakte Ring der hyperstetigen Endomorphismen von $\mathfrak{M}$, so gilt: Die abgeschlossenen zweiseitigen idempotenten von Null verschiedenen Unterideale des Radikals sind genau die zu dichten Vergröberungen von $\mathfrak{M}$ gehörigen charakteristischen Ideale. Zu verschiedenen Vergröberungen gehören dabei verschiedene Ideale.*

Beweis. 1. Die Vergröberung (v) sei gegeben. Wir wählen endlich viele Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathfrak{M}$ mit $\chi(x_i) = \{|x_i|\}$ (d. h. für die nur ein Summand nicht verschwindet), und für welche alle x_i mit gleichem $n = |x_i|$ in P_n bezüglich Δ_n linear unabhängig sind. Ist dann etwa $|x_1| = \cdots = |x_l| = n$, so

gibt es Transformationen $\varepsilon_i \in \pi_n R \pi_n$, $i = 1, \ldots, l$, mit $\varepsilon_i x_j = \delta_{ij} x_j$, $i, j \leq l$. Somit gibt es also Elemente $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ aus R mit $\varepsilon_i x_j = \delta_{ij} x_j$ für alle $i, j \leq k$. Sind nun weitere Elemente $y_1, \ldots, y_k$ mit $|y_i| < |x_i|$, $i = 1, \ldots, k$, gegeben, so existieren nach $(\varkappa)$ Elemente $\vartheta_i \in C_\varkappa$ mit $y_i = \vartheta_i x_i$. Setzen wir $\vartheta = \sum \vartheta_i \varepsilon_i$, so ist $y_i = \vartheta x_i$ für $i = 1, \ldots, k$.

α) Sei (v) nun dicht und $\gamma \in C_\varkappa$. Wir wählen Elemente x_1 bis x_k wie oben und setzen $y_i = \gamma x_i$. Dann gilt $|y_i| < |x_i|$ und da (v) dicht ist, können wir Elemente z_i mit $|y_i| < |z_i| < |x_i|$ bestimmen, wobei wir die z_i noch so wählen können, daß alle $|z_i|$ verschieden sind und $\chi(z_i) = \{|z_i|\}$ ist. Nach unseren obigen Überlegungen existieren nun Elemente ϑ und ϑ' in $C_\varkappa$ mit $\vartheta x_i = z_i$, $\vartheta' z_i = y_i$, also $\vartheta' \vartheta x_i = y_i = \gamma x_i$. Ist also L der Annullator von $x_1, \ldots, x_k$, so gilt $\gamma \equiv \vartheta' \vartheta \pmod{L}$, und da γ beliebig gewählt wurde, folglich: $C_\varkappa + L \subset C_\varkappa^2 + L$, d.h. $C_\varkappa + L = C_\varkappa^2 + L$. Diese Gleichung gilt für jede Wahl des Systems $x_1, \ldots, x_k$, sofern nur die an die x_i gestellten Bedingungen erfüllt sind. Da die zugehörigen Annullatoren ein Filter $\boldsymbol{L}$ mit $\downarrow \boldsymbol{L} = 0$ bilden, folgt aus der letzten Gleichung also $C_\varkappa = \overline{C_\varkappa^2}$, d.h. $C_\varkappa$ ist ein idempotentes Unterideal des Radikals.

β) Ist (v) nicht dicht, so gibt es zwei benachbarte Indizes s und t. Ist $s < t$, so ist $\mathfrak{V}_t^{(v)} = \mathfrak{U}_s^{(v)}$, also $C_\varkappa \mathfrak{U}_t^{(v)} = \mathfrak{U}_s^{(v)}$, $C_\varkappa^2 \mathfrak{U}_t^{(v)} = C_\varkappa \mathfrak{U}_s^{(v)} = \mathfrak{V}_s^{(v)} \neq \mathfrak{U}_s^{(v)}$. Hieraus folgt $C_\varkappa \neq \overline{C_\varkappa^2}$.

2. Nun nehmen wir an, daß C ein abgeschlossenes idempotentes zweiseitiges Unterideal des Radikals ist. Wir wollen zeigen, daß $C = C_\varkappa$ ist mit einem zu einer dichten Vergröberung (v) gehörigen charakteristischen Ideal $C_\varkappa$. Für jedes $i \in I$ setzen wir

$$C \mathfrak{U}_i = \mathfrak{V}_{t(i)}.$$

Daß hier unter den $C \mathfrak{U}_i$ kein $\mathfrak{U}_j$ mit $j \in I$ auftreten kann, folgt aus $C = \overline{C^2} \subset N$. Die Abbildung $i \to t(i)$ ist isoton von I auf eine Teilmenge T aus $\tilde{I}$. T definiert eine Vergröberung $v = v(T)$ von $\mathfrak{M}$, zu der ein charakteristisches Ideal $C_\varkappa$ gehört. Wir behalten hier die Bezeichnungsweise der Abschnitte vor Satz 8 bei.

Sind $i, j \in I_s$, so ist $t(i) = t(j) = t_s$ und U_s besteht aus allen $h \in T$ mit $h \leq t_s$: Für $i \in I_s$ folgt wegen $t(i) \leq i$ zunächst $t(i) \in U_s$. Ist $r \in T$ und $t(i) \leq r \leq i$, so gilt $\mathfrak{V}_{t(i)} \subset \mathfrak{V}_r \subset \mathfrak{U}_i$, also

$$\mathfrak{V}_{t(i)} = C \mathfrak{V}_{t(i)} \subset C \mathfrak{V}_r = \mathfrak{V}_r \subset C \mathfrak{U}_i = \mathfrak{V}_{t(i)},$$

d.h. $\mathfrak{V}_{t(i)} = \mathfrak{V}_r$, also $r = t(i) \in U_s$; $t(i) = t_s$ ist also der maximale Index aus U_s und I_s besteht aus allen $i \in I$ mit $t(i) = t_s$. Ist $z \in \mathfrak{V}_{t_s}$, so ist $|z| = j < t_s$, also $j \in I_{s'}$ mit $s' < s$, d.h. $z \in \mathfrak{V}_s^{(v)}$. Folglich gilt $C \mathfrak{U}_s^{(v)} \subset \mathfrak{V}_s^{(v)}$, also $C \subset C_\varkappa$. Wir wählen nun wieder Elemente $x_1, \ldots, x_k$ aus $\mathfrak{M}$ mit $\chi(x_i) = \{|x_i|\}$, für die alle x_i mit gleichem $|x_i|$ unabhängig sind. Um $C = C_\varkappa$ zu zeigen, genügt es, nach derselben Schlußweise wie in 1. α) zu beweisen, daß zu $\beta \in C_\varkappa$ ein $\gamma \in C$ mit $\gamma x_i = \beta x_i$, $i = 1, \ldots, k$, existiert. Wegen $|\beta x_i| < |x_i|$ ist $|\beta x_i| < t(|x_i|)$ und folglich $\beta x_i \in C \mathfrak{U}_{x_i}$, d.h. es gibt ein $\gamma_i \in C$ mit $\beta x_i = \gamma_i x_i$. Nun wählen wir wieder Elemente $\varepsilon_i \in R$ mit $\varepsilon_i x_j = \delta_{ij} x_i$ und setzen $\gamma = \sum \gamma_i \varepsilon_i$. Dann liegt

γ in C und es gilt $\gamma x_i = \gamma_i x_i = \beta x_i$. Damit ist $C = C_\varkappa$ gezeigt. Nach 1. β) ist v dicht.

Sind v und v' verschiedene Vergröberungen, $|x|$ und $\|x\|$ die Bezeichnungen für die Indizes der Köpfe bezüglich v und v', so existieren Elemente y und z aus $\mathfrak{M}$ mit $|y| < |z|$, $\|y\| = \|z\|$. Das zu v gehörige charakteristische Ideal enthält dann ein ϑ mit $y = \vartheta z$. Wegen $\|\vartheta z\| = \|z\|$ kann ϑ nicht auch im charakteristischen Ideal der Vergröberung v' liegen, diese beiden Ideale sind also verschieden. Damit ist Satz 8 bewiesen.

Folgerungen:

(2.3) *Das Radikal N von R ist genau dann nilpotent, wenn der Typ ι von I keinen dichten Teil enthält. N ist genau dann idempotent, wenn ι dicht ist.*

Ist $\underset{*}{N} \neq 0$, so existiert wegen $\overline{\underset{*}{N^2}} = \underset{*}{N}$ eine dichte Vergröberung v von $\mathfrak{M}$. Ist $\{I_t\}$ das zu v gehörende System der Teilmengen von I, so ist jedes Vertretersystem der I_t ein dichter Teil von I. Umgekehrt definiert ein dichter Teil von I eine dichte Vergröberung von $\mathfrak{M}$ und somit ein idempotentes Unterideal $C \neq 0$ von N. Wegen $C < N$ ist dann auch $\underset{*}{N} \neq 0$. Sei v_0 diejenige Vergröberung von $\mathfrak{M}$, in der alle I_t genau ein i aus I enthalten, d.h. für die im wesentlichen $J(= \{I_t\}) = I$ und $S_i = P_i$ ist. Aus der Irreduzibilität der P_i folgt leicht, daß das zu v_0 gehörige charakteristische Ideal gerade gleich dem Radikal von R ist. Daraus folgt nach Satz 8 sofort die zweite Behauptung von (2.3).

Satz 9. *Das charakteristische Ideal C_ι des Ringes R aller hyperstetigen Endomorphismen der ι-induktiven Summe $\mathfrak{M}$ ist genau dann r-nilpotent (l-nilpotent), wenn $\iota = \sum_{\omega^*} \iota_i$ ($\iota^* = \sum_{\omega^*} \iota_i$) mit Ordnungszahlen ι_i, $i = 1, 2, \ldots$ ist.*

Beweis. 1. α) Sei $C = C_\iota$ und $\iota = \sum_{\omega^*} \iota_i$ der Typ der Indexmenge I. Für jedes $i \in I$ ist dann die Menge aller $j \geqq i$ aus I wohlgeordnet. Sei $\mathfrak{W} = \{x \mid C_* x < \mathfrak{V}_i\}$. Ist $\mathfrak{V}_h < \mathfrak{W}$, so folgt $C_* \mathfrak{U}_h = C_* \cdot C\mathfrak{U}_h < C_* \mathfrak{V}_h < C_* \mathfrak{W} < \mathfrak{V}_i$, also auch $\mathfrak{U}_h < \mathfrak{W}$. Daraus schließt man, daß alle $\mathfrak{U}_h$ in $\mathfrak{W}$ liegen müssen, d.h. es ist $\mathfrak{W} = \mathfrak{M}$, also $C_* \mathfrak{M} < \mathfrak{V}_i$ für jedes $i \in I$, d.h. $C_* \mathfrak{M} = 0$, $C_* = 0$.

β) Ist ι in keiner Weise als $\sum_{\omega^*} \iota_i$ mit Ordnungszahlen ι_i darstellbar, so enthält ι den Ordnungstyp $1 + \omega^*$. Hierzu gehört eine Vergröberung, deren charakteristisches Ideal D in C enthalten ist. Ist $D_* \neq 0$, so erst recht $C_* \neq 0$, wir können uns also auf den Fall $\iota = 1 + \omega^*$ beschränken. Für I wählen wir die Menge der negativen ganzen Zahlen und das Symbol $-\infty$ in der natürlichen Ordnung. Ist $\mathfrak{M} = \boldsymbol{S}_{1+\omega^*} P_i$, so wählen wir in jedem P_i, $-\infty < i$, ein $u_i \neq 0$. Dann gilt $\mathfrak{U}_{-\infty} = P_{-\infty} < \mathfrak{U}_{i-1} = C u_i$. Ist nun für eine Ordnungszahl λ und alle $i \in I$ mit $-\infty < i$ schon $\mathfrak{U}_{-\infty} < C_\lambda u_i$ bewiesen, so folgt

$$\mathfrak{U}_{-\infty} < C_\lambda u_{i-1} < C_\lambda \cdot C u_i = C_{\lambda+1} u_i.$$

Hieraus folgt wie üblich $\mathfrak{U}_{-\infty} < C_* u_i$, also $C_* \neq 0$.

2. α) Sei $\iota = \sum_{\omega} \iota_i$ mit Ordnungszahlen ι_i^*. Für jedes $i \in I$ ist die Menge der $j \leqq i$ invers wohlgeordnet; daraus folgt $\mathfrak{V}_i = \mathfrak{U}_{i-1}$. Würde es nun ein $x \in \mathfrak{M}$ mit ${}_*Cx \neq 0$ geben, so hätten wir mit geeignetem $i \in I$: $\mathfrak{U}_{i-1} \subset {}_*Cx \subset \mathfrak{U}_i$. Das ist aber wegen $C \cdot {}_*Cx = {}_*Cx$ unmöglich. Folglich ist ${}_*C\mathfrak{M} = 0$, ${}_*C = 0$.

β) Wie unter 1. β) sieht man, daß wir uns darauf beschränken können, im Fall $\iota = \omega + 1$ zu beweisen, daß ${}_*C$ nicht verschwindet. In diesem Fall sei $I = \{1, 2, \ldots, \infty\}$. Für $u \in P_\infty$, $u \neq 0$, ist $\mathfrak{V}_\infty = Cu$ und $\mathfrak{U}_i = C\mathfrak{U}_{i+1}$, also $\mathfrak{V}_\infty = C\mathfrak{V}_\infty$. Ist $\mathfrak{V}_\infty = {}_\mu Cu$ für eine Ordnungszahl μ schon gezeigt, so folgt

$$\mathfrak{V}_\infty = C\mathfrak{V}_\infty = C \cdot {}_\mu Cu = {}_{\mu+1}Cu,$$

also wie üblich $\mathfrak{V}_\infty = {}_*Cu$, d.h. ${}_*C \neq 0$. Damit ist Satz 9 bewiesen.

Folgerungen:

(2.4) *$\mathfrak{M}$ (und damit auch R) ist in der g.l.k. Topologie genau dann i.e.S.l.k., wenn $\iota = \sum_{\omega^*} \iota_i$ mit Ordnungszahlen ι_i ist und in allen P_i die Minimalbedingung gilt.*

Für jedes i ist P_i diskret und zu $\mathfrak{U}_i/\mathfrak{V}_i$ isomorph, ist also $\mathfrak{M}$ i.e.S.l.k., so muß in allen P_i die Minimalbedingung gelten. Ferner ist dann das Radikal N von R und damit auch das charakteristische Ideal r-nilpotent. Folglich ist nach Satz 9 $\iota = \sum_{\omega^*} \iota_i$. Um die Umkehrung zu beweisen, braucht man wegen (1.7) nur $N_* = 0$ zu zeigen. Das kann man aber fast genau so wie $C_* = 0$ unter 1. α) beweisen. Man hat dabei lediglich zu berücksichtigen, daß jedes $x \in \mathfrak{U}_i$ durch eine endliche Potenz von N modulo $\mathfrak{V}_i$ annulliert wird.

(2.5) *Sind alle P_i irreduzibel, so ist das Radikal von R genau dann l-nilpotent, wenn $\iota = \sum_{\omega} \iota_i$ mit Ordnungszahlen ι_i^*.*

In diesem Falle ist nämlich das Radikal gleich dem charakteristischen Ideal. Die Voraussetzung der Irreduzibilität der Moduln P_i läßt sich nicht wesentlich abschwächen, (2.5) wird z.B. schon falsch, wenn man für die P_i statt der Irreduzibilität nur die Gültigkeit der Minimalbedingung fordert. Man wähle etwa einen Schiefkörper Δ, setze $Q_\iota = \Delta_{(1,\omega)} = \mathbf{S}_\omega \Delta$ und $\mathfrak{M} = \mathbf{S}_{\omega^*} Q_\iota$. Dann sind alle Q_i diskret und i.e.S.l.k., genügen also der Minimalbedingung. Da aber mit $P_j = \Delta$ offenbar auch $\mathfrak{M} = \mathbf{S}_{\omega^* \omega} P_j$ ist, ist die notwendige Bedingung von (2.5) nicht erfüllt, das Radikal des zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Ringes kann also nicht l-nilpotent sein.

§ 3

Wir werden in diesem Paragraphen für vollständige l.t. Ringe S Matrixringe $S^{(\mathfrak{a})}$ beliebigen Grades $\mathfrak{a}$ definieren, die wir im nächsten Paragraphen für die Untersuchung primärer l.k. Ringe gebrauchen werden. Ist S ein Körper, so ist $S^{(\mathfrak{a})}$ nichts anderes, als der Endomorphismenring eines Vektormoduls $\mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$ vom Range $\mathfrak{a}$ über S. Wir werden nun $S^{(\mathfrak{a})}$ auch allgemein als Endomorphismenring eines in bestimmter Weise erklärten S-Rechtsmoduls $\mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$ definieren, den man als eine Art $\mathfrak{a}$-gliedriger direkter Summe von zu S isomorphen Summanden erhält. Diese Art der Definition von $S^{(\mathfrak{a})}$

ist in mancher Hinsicht vorteilhafter als diejenige, welche $S^{(\mathfrak{a})}$ durch gewisse Matrizen $(s_{\mu\nu})$ mit Elementen $s_{\mu\nu}\in S$ beschreibt. Bei unserer Definition ist $S^{(\mathfrak{a})}$ z.B. automatisch ein vollständiger l.t. Ring. Enthält S eine Eins, so läßt $S^{(\mathfrak{a})}$ sich in einfacher Weise durch Matrizen beschreiben.

Sei S ein vollständiger linear topologischer Ring, $\boldsymbol{B}$ der Filter aller offenen Linksideale und I eine Indexmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$. Ein System $\{x_\mu\}_{\mu\in I}$ von Elementen $x_\mu\in S$ heißt *summierbar* (vgl. [1], § 4), wenn jedes $L\in\boldsymbol{B}$ fast alle x_μ enthält. Die Restklassen $\sum_{x_\mu\notin L} x_\mu + L$ bilden dann ein Cauchyfilter $\boldsymbol{C}$, der wegen der Vollständigkeit von S gegen ein Element x konvergiert. Wir setzen

$$x = \lim \boldsymbol{C} = \sum_{\mu\in I} x_\mu.$$

Die folgenden Aussagen sind so einfach, daß wir auf die Beweise verzichten (vgl. auch [1]).

(3.1) *Sind* $\{x_\mu\}_{\mu\in I}$ *und* $\{y_\mu\}_{\mu\in I}$ *summierbar, so auch* $\{x_\mu+y_\mu\}_{\mu\in I}$ *und es gilt* $\sum x_\mu+\sum y_\mu=\sum(x_\mu+y_\mu)$.

(3.2) *Ist* $\{x_\mu\}_{\mu\in I}$ *summierbar und* $\{y_\mu\}_{\mu\in I}$ *ein System von beliebigen Elementen* $y_\mu\in S$, *so ist auch* $\{y_\mu x_\mu\}_{\mu\in I}$ *summierbar.*

(3.3) *Ist* $\{x_\mu\}_{\mu\in I}$, $x_\mu\in S$, *summierbar und* f *eine stetige additive Abbildung von* S *in einen vollständigen l.t. Ring* S', *so ist* $\{f(x_\mu)\}_{\mu\in I}$ *in* S' *summierbar und es gilt* $f(\sum x_\mu)=\sum f(x_\mu)$.

Folgerungen:

(3.4) *Ist* $\{x_\mu\}$ *in* S *summierbar, so sind für jedes* $z\in S$ *die Systeme* $\{zx_\mu\}$ *und* $\{x_\mu z\}$ *summierbar und es gilt*

$$z\sum x_\mu=\sum zx_\mu, \qquad (\sum x_\mu)z=\sum x_\mu z.$$

Wir ordnen jedem μ der Indexmenge I einen zu S isomorphen Ring S_μ und einen festen Isomorphismus i_μ von S auf S_μ zu. Die aus diesen S_μ gebildete vollständige direkte Summe

$$S^\natural = \sum_{\mu\in I}{}^\natural S_\mu$$

ist ein Ring, für den S durch folgende Festsetzung zum Rechtsmultiplikatorenbereich wird:

Für $x=\sum_{\mu}{}^\natural i_\mu(x_\mu)\in S^\natural$ und $z\in S$ sei $xz=\sum_{\mu}{}^\natural i_\mu(x_\mu z)$.

Wenn wir im folgenden die Elemente aus S als Operatoren von $S^\natural$ oder von Untermoduln aus $S^\natural$ bezeichnen werden, so werden wir das stets im Sinne dieser Rechtsmultiplikation meinen. Ein S-Untermodul von $S^\natural$ ist also ein rechts-S-invarianter Untermodul von $S^\natural$. Wir wollen übrigens zur Unterscheidung der Summenbildung in S die Summation über I in $S^\natural$ durch das Symbol „$\sum^\natural$“ bezeichnen. Ist A ein Ideal aus S, so sei $A^\natural$ der Untermodul aller Elemente $\sum^\natural i_\mu(x_\mu)$ aus $S^\natural$ mit $x_\mu\in A$. Durchläuft L einen Basisfilter von S, so durchläuft $L^\natural$ einen Filter $\boldsymbol{B}^\natural$ von $S^\natural$. *Wir machen* $S^\natural$ *zum linear topologischen Modul, indem wir* $\boldsymbol{B}^\natural$ *zum Basisfilter wählen.* Die Operatoren

aus S sind dann stetig, die Multiplikationen von links mit Elementen aus $S^\natural$ hyperstetig.

Sei ε_μ die Projektion von $S^\natural$ auf den Summanden S_μ. Ist $\boldsymbol{C}$ ein Cauchyfilter von $S^\natural$, so ist $\varepsilon_\mu \boldsymbol{C}$ ein Cauchyfilter in S_μ, ist also $x_\mu = \lim \varepsilon_\mu \boldsymbol{C}$, so liegt $x = \sum_\mu^\natural x_\mu$ in $\downarrow \boldsymbol{C}$, d.h. es ist $x = \lim \boldsymbol{C}$. Folglich ist $S^\natural$ vollständig. Sämtliche Elemente $\sum^\natural i_\mu(x_\mu) \in S^\natural$, für welche die Folgen $\{x_\mu\}$ in S summierbar sind, bilden einen Untermodul $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$ von $S^\natural$. Wegen (3.2) und (3.4) ist $\mathfrak{M}$ ein Linksideal aus $S^\natural$ und S-Untermodul. Liegt $z = \sum^\natural z_\mu \in S^\natural$ nicht in $\mathfrak{M}$, so ist $\{i_\mu^{-1}(z_\mu)\}$ in S nicht summierbar, es gibt also ein offenes Linksideal L in S, das unendlich viele der $i_\mu^{-1}(z_\mu)$ nicht enthält. Da für $x = \sum^\natural x_\mu \in S^\natural$ die Kongruenz $x \equiv z \pmod{L^\natural}$ mit dem System der Kongruenzen $i_\mu^{-1}(x_\mu) \equiv i_\mu^{-1}(z_\mu) \pmod{L}$ äquivalent ist, kann z nicht in $\mathfrak{M} + L^\natural$ liegen, d.h. es ist $(z + L^\natural) \cap \mathfrak{M} = \emptyset$. Folglich ist $\mathfrak{M}$ in $S^\natural$ abgeschlossen. Wegen der Vollständigkeit von $S^\natural$ ist $\mathfrak{M}$ also ein vollständiger l.t. Modul mit S als Bereich stetiger Rechtsoperatoren. Wir fassen noch einmal zusammen:

(3.5) *Der Untermodul $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$ ist ein vollständiger l.t. Modul mit $S^\natural$ als Bereich hyperstetiger Linksoperatoren und S als Bereich stetiger Rechtsoperatoren. Für diskretes S ist $\mathfrak{M}$ nichts anderes als die algebraische direkte Summe von $\mathfrak{a}$ zu S isomorphen Summanden.*

Wir werden nun die stetigen und insbesondere die hyperstetigen Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ untersuchen.

(3.6) *Für jeden mit S vertauschbaren stetigen Endomorphismus τ von $\mathfrak{M}$ und für jeden abgeschlossenen Untermodul $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{M}$ gilt: $\tau(S^\natural \mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}$.*

Ist $a = \sum^\natural a_\mu \in \mathfrak{A}$ und $z = \sum^\natural z_\mu \in S^\natural$, so ist $za = \sum^\natural z_\mu a_\mu$ Häufungspunkt der aus den $z_\mu a_\mu$ gebildeten endlichen Teilsummen, um $\tau(za) \in \mathfrak{A}$ nachzuweisen, genügt also $\tau(z_\mu a_\mu) \in \mathfrak{A}$ für jedes μ zu zeigen. Sei $\tau(z_\mu) = \sum_\nu^\natural y_\nu \in \mathfrak{M}$. Wegen der Vertauschbarkeit von τ mit den Rechtsoperatoren aus S ist dann $\tau(z_\mu a_\mu) = \tau(z_\mu) a_\mu = \sum_\nu^\natural y_\nu a_\mu$. Das Element $\sum_\nu^\natural y_\nu a_\mu$ ist wieder Häufungspunkt der von den $y_\nu a_\mu \in \mathfrak{A}$ gebildeten endlichen Teilsummen und liegt wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$. Folglich ist auch $\tau(za) \in \mathfrak{A}$, womit (3.6) bewiesen ist. Folgerung:

(3.7) *Enthält S ein Einselement, so sind alle mit den Rechtsoperatoren aus S vertauschbaren Endomorphismen von $\mathfrak{M}$ hyperstetig.*

Denn in diesem Falle ist $\mathfrak{A} = S^\natural \mathfrak{A}$.

Definition. Ist S ein vollständiger linear topologischer Ring und $\mathfrak{a}$ eine Kardinalzahl, so verstehen wir unter dem *Matrixring vom Grade $\mathfrak{a}$ über S* den nach [8], S. 246, linear topologisierten Ring aller hyperstetigen mit den Rechtsoperatoren aus S vertauschbaren Endomorphismen des dem Ring S zugeordneten Moduls $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$.

Nach Satz L6 ist $S^{(\mathfrak{a})}$ also ein vollständiger l.t. Ring.

Wir wollen jetzt die $S^{(a)}$-invarianten Untermoduln von $\mathfrak{M}$ bestimmen und setzen dazu

$$\varepsilon_{\mu\nu} = i_\mu i_\nu^{-1} \varepsilon_\nu .$$

Diese Endomorphismen sind hyperstetig, d.h. liegen in $S^{(a)}$, und genügen den Formeln

$$(\varepsilon) \qquad \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} \varepsilon_{\mu\lambda} & \text{falls } \nu = \varkappa \\ 0 & \text{falls } \nu \neq \varkappa, \end{cases} \qquad \varepsilon_{\mu\mu} = \varepsilon_\mu .$$

Ist nun $\mathfrak{A}$ ein $S^{(a)}$-invarianter Untermodul von $\mathfrak{M}$, so folgt $\varepsilon_\mu(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_\mu < \mathfrak{A}$, also $\sum^\natural \mathfrak{A}_\mu < \mathfrak{A} < \sum^\natural \mathfrak{A}_\mu$, d.h. $\mathfrak{A} = \sum^\natural \mathfrak{A}_\mu$. Weiter: $\varepsilon_{\mu\nu}\mathfrak{A}_\nu < \mathfrak{A}_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\nu\mu}\mathfrak{A}_\mu < \varepsilon_{\mu\nu}\mathfrak{A}_\nu$, also $\varepsilon_{\mu\nu}\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}_\mu$ für alle μ und ν aus I. Nach Definition der $\varepsilon_{\mu\nu}$ bedeutet das $i_\nu^{-1}(\mathfrak{A}_\nu) = i_\mu^{-1}(\mathfrak{A}_\mu) = A < S$ mit einem festen abgeschlossenen Linksideal A von S. Wir haben also gezeigt:

(3.8) *Durchläuft A alle abgeschlossenen Linksideale aus S, so durchläuft $\mathfrak{A} = A^\natural \cap \mathfrak{M}$ genau alle abgeschlossenen $R^{(a)}$-invarianten Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Insbesondere ist der Verband der $R^{(a)}$-Untermoduln von $\mathfrak{M}$ zum Verband der Linksideale von S isomorph.*

$S^{(a)}$ enthält einen Unterring $S_0^{(a)}$, den wir durch Matrizen $(t_{\mu\nu})$, $t_{\mu\nu} \in S$, mit summierbaren Spalten $\{t_{\mu\nu}\}_\mu$ beschreiben können: Der Matrix $T = (t_{\mu\nu})$ werde in folgender Weise ein Endomorphismus $\tau \in S^{(a)}$ zugeordnet: Ist $x = \sum^\natural x_\mu \in \mathfrak{M}$, so sei $\tau(x) = y = \sum^\natural y_\nu$ definiert durch die Formel

$$y_\nu = i_\nu \Big(\sum_\mu t_{\nu\mu} i_\mu^{-1}(x_\mu) \Big) .$$

Wir lassen der Einfachheit halber im folgenden die Zeichen i_μ für die Isomorphismen fort. Mit $\{x_\mu\}_\mu$ ist wegen (3.2) auch $\{t_{\nu\mu}x_\mu\}_\mu$ summierbar, so daß $y_\nu = \sum_\mu t_{\nu\mu}x_\mu$ für jedes ν existiert. Ist L ein offenes Linksideal aus S, so liegen fast alle x_μ in L, etwa alle mit Ausnahme von $x_1, \ldots, x_k$. Daraus folgt $y_\nu \equiv \sum_{i=1}^{k} t_{\nu i}x_i \pmod{L}$. Nach (3.1) und (3.4) ist das System der $y_\nu' = \sum_1^k t_{\nu i}x_i$ summierbar, so daß fast alle y_ν' und folglich auch fast alle y_ν in L liegen. Daraus folgt, daß auch $\{y_\nu\}_\nu$ summierbar ist, τ ist also eine Abbildung von $\mathfrak{M}$ in sich. Die Vertauschbarkeit mit den Operatoren aus S und die Additivität der Abbildung τ folgt unmittelbar aus den definierenden Formeln. Liegt $x = \sum^\natural x_\mu$ in einem abgeschlossenen Untermodul $\mathfrak{A}$, so auch jede endliche Teilsumme $\sum_\mu' t_{\nu\mu}x_\mu$, folglich auch y_ν und y, τ gehört also in der Tat zu $S^{(a)}$.

Für zwei Matrizen $T = (t_{\mu\nu})$ und $U = (u_{\mu\nu})$ kann man das Produkt wie üblich durch $TU = \big(\sum_\sigma t_{\mu\sigma}u_{\sigma\nu}\big)$ definieren. Die Matrizen bilden dann einen Ring $(S)_a$ und $S_0^{(a)}$ ist homomorphes Bild von $(S)_a$; der Kern besteht dabei aus allen Matrizen $(w_{\mu\nu})$ mit Elementen $w_{\mu\nu}$ aus dem Ideal W aller $x \in S$ mit $xS = 0$.

(3.9) *Enthält S ein Einselement, so ist* $(S)_a \cong S_0^{(a)} = S^{(a)}$.

Sei e das Einselement und $e_\mu = i_\mu(e) \in \mathfrak{M}$. Ist $\tau \in S^{(\mathfrak{a})}$, so ist $\tau(e_\mu) = \sum_\nu^{\mathfrak{h}} t'_{\nu\mu} \in \mathfrak{M}$, das System der $t_{\nu\mu} = i_\nu^{-1}(t'_{\nu\mu})$ bei festem μ also summierbar. Es ist leicht zu sehen, daß die Isomorphie von (3.9) durch $\tau \leftrightarrow (t_{\nu\mu})$ hergestellt wird.

Man kann $(S)_\mathfrak{a}$ auch unmittelbar zum topologischen Ring machen: Ist H ein offenes Linksideal aus S und sind $\nu_1, \ldots, \nu_k$ endlich viele Indizes, so bildet die Menge aller Matrizen $(t_{\mu\nu})$ mit $t_{\mu\nu_i} \in H$ für $i = 1, \ldots, k$ und alle μ ein Linksideal $L_\mathfrak{a}(\nu_1, \ldots, \nu_k; H)$. Das System aller dieser Linksideale aus $(S)_\mathfrak{a}$ ist ein Filter und definiert eine Topologie in $(S)_\mathfrak{a}$. In dieser Topologie ist $(S)_\mathfrak{a}$ ein vollständiger separierter l.t. Ring und die Isomorphie von (3.9) ist mit dieser Topologie in beiden Richtungen stetig.

Wir hatten gesehen, daß für jeden vollständigen l.t. Ring S der Ring $S^{(\mathfrak{a})}$ ein Einselement 1 und ein System von Elementen $e_{\mu\nu}$ enthält, die den Gleichungen (ε) genügen und für die, wie man leicht sieht, $\{e_\mu\}_\mu$ summierbar ist mit $\sum_\mu e_\mu = 1$. Ist nun S^* ein beliebiger vollständiger l.t. Ring mit 1, so bezeichnen wir ein System $\{e_{\mu\nu}\}$ von Elementen $e_{\mu\nu} \in S^*$, für die

1. die Gleichungen (ε) gelten (mit $e_{\mu\nu}$ statt $\varepsilon_{\mu\nu}$) und
2. das Teilsystem $\{e_\mu\}$, $e_\mu = e_{\mu\mu}$, summierbar ist mit $\sum_\mu e_\mu = 1$

allgemein als System von *Matrixeinheiten*. Die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ des Teilsystems $\{e_\mu\}$ nennen wir den *Grad* des Systems. Wegen $e_\varkappa = e_{\varkappa\mu} e_{\mu\nu} e_{\nu\varkappa}$ kann kein $e_{\mu\nu} = 0$ sein, insbesondere sind die e_μ von 0 verschiedene Idempotente. Nach (3.2) sind wegen $e_{\mu\nu} e_\nu = e_{\mu\nu}$ auch alle Systeme $\{e_{\mu\nu}\}_\nu$ summierbar. Ist $e \neq 0$ ein idempotentes Element aus S^*, so ist S^*e als Menge aller $x \in S^*$ mit $x(1-e) = 0$ ein abgeschlossenes Linksideal und eS^*e als Menge aller $x \in S^*e$ mit $(1-e)x = 0$ ein abgeschlossener, also vollständiger l.t. Unterring von S^*.

Kann man nun einen Ring S^* mit Einselement 1 und einem System $\{e_{\mu\nu}\}$ von Matrixeinheiten vom Grade $\mathfrak{a}$ als Matrixring $S^{(\mathfrak{a})}$ über einem geeigneten l.t. Ring S darstellen? Wir wollen jetzt zeigen, daß das in der Tat der Fall ist, und zwar behaupten wir: Ist e_1 ein festes idempotentes Element aus $\{e_\mu\}$ und $S = e_1 S^* e_1$, so sind S^* und $S^{(\mathfrak{a})}$ isomorph. Wie wir gesehen haben, ist S jedenfalls ein vollständiger l.t. Ring. Wir werden zunächst zeigen:

(3.10) *$M = S^*e_1$ und der Modul $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$ sind isomorphe S-Rechts-Moduln.*

Wir setzen $S_\mu = e_\mu S^* e_\mu = e_{\mu 1} S e_{1\mu}$ und wählen für i_μ den Isomorphismus $x \to e_{\mu 1} x e_{1\mu}$ von S auf S_μ. $\mathfrak{M}$ ist der Untermodul aller $\sum_\mu^{\mathfrak{h}} x_\mu$ aus $\sum_\mu^{\mathfrak{h}} S_\mu$ mit summierbaren $\{i_\mu^{-1}(x_\mu)\}$ aus S.

Wir definieren eine Abbildung φ von $M = S^*e_1$ auf $\mathfrak{M}$ durch

$$x \to \varphi(x) = \sum_\mu^{\mathfrak{h}} e_\mu x e_{1\mu} = \sum_\mu^{\mathfrak{h}} x_\mu .$$

Zunächst ist $i_\mu^{-1}(x_\mu) = e_{1\mu} x e_{1\mu} e_{\mu 1} = e_{1\mu} x e_1 = e_{1\mu} x$, also $\{i_\mu^{-1}(x_\mu)\}$ wegen (3.4) summierbar, d.h. $\varphi(x)$ liegt in $\mathfrak{M}$. Es ist klar, daß φ ein algebraischer S-Homomorphismus von M in $\mathfrak{M}$ ist. Aus $\varphi(x) = 0$ folgt $e_\mu x e_{1\mu} e_{\mu 1} = e_\mu x = 0$ für alle μ, also $\sum_\mu e_\mu x = x = 0$, d.h. φ ist sogar ein Isomorphismus. Ist

$y' = \sum^{\natural} y'_\mu = \sum^{\natural} i_\mu(y_\mu) \in \mathfrak{M}$, so ist $\{y_\mu\}$ ein summierbares System aus S, nach (3.4) also $\{e_{\mu 1} y_\mu\}$ ein summierbares System aus M, da M abgeschlossen ist, liegt dann $y = \sum_\nu e_{\nu 1} y_\nu$ in M und es ist $e_\mu y e_{1\mu} = e_{\mu 1} y_\mu e_{1\mu} = i_\mu(y_\mu) = y'_\mu$, d.h. $\varphi(y) = y'$. Folglich ist φ ein algebraischer Isomorphismus von M auf $\mathfrak{M}$. Durchläuft L die offenen Linksideale eines Basisfilters von S^*, so durchläuft $(L \cap S)^{\natural} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{L}_L$ einen Basisfilter in $\mathfrak{M}$ und $L \cap M$ einen Basisfilter in M. Ein Element x liegt genau dann in $L \cap M$, wenn alle $e_{1\mu} x$ in $L \cap S$ liegen; das ist genau dann der Fall, wenn $\sum^{\natural} i_\mu(e_{1\mu} x) = \varphi(x)$ in $\mathfrak{L}_L$ liegt. Folglich ist $\varphi(L \cap M) = \mathfrak{L}_L$. Daraus folgt, daß φ auch ein topologischer Isomorphismus ist.

Die Linksmultiplikationen mit den Elementen aus S^* induzieren hyperstetige mit S vertauschbare Endomorphismen von M. Ist $x \in S^*$ und $xM = 0$, so ist insbesondere $x e_{\mu 1} = 0$, also $x e_{\mu 1} e_{1\mu} = x e_\mu = 0$, also $x = \sum_\mu x e_\mu = 0$. Durch die Festsetzung $t\varphi(x) = \varphi(tx)$ für $t \in S^*$ wird S^* also algebraisch zum Unterring von $S^{(\alpha)}$. Sei nun τ ein beliebiges Element aus $S^{(\alpha)}$. Die Elemente $e'_\mu = \varphi(e_{\mu 1})$ erzeugen einen dichten S-Untermodul von $\mathfrak{M}$, um $\tau \in S^*$ zu zeigen, genügt also die Angabe eines Elementes $t \in S^*$ mit $\tau e'_\mu = t e'_\mu = \varphi(t e_{\mu 1})$ für alle μ aus der Indexmenge I der e_μ. Ein solches t ist aber leicht gefunden: Wegen $S^* e_{\mu 1} = S^* e_1 = M$ existiert zu jedem $\mu \in I$ ein $t_\mu \in S^*$ mit $t_\mu e_{\mu 1} = \varphi^{-1}(\tau e'_\mu)$. Wegen (3.4) existiert $t = \sum t_\mu e_\mu$ und für jedes $\mu \in I$ ist $t e_{\mu 1} = t_\mu e_{\mu 1} = \varphi^{-1}(\tau e'_\mu)$, also $\tau e'_\mu = \varphi(t e_{\mu 1}) = t e'_\mu$, d.h. $\tau = t \in S^*$. Damit ist die algebraische Gleichheit von S^* und $S^{(\alpha)}$ bewiesen. Wir müssen nun noch prüfen, ob auch die topologischen Strukturen übereinstimmen.

In $S^{(\alpha)}$ erzeugen die Linksideale

$$L(x, \mathfrak{H}) = \{\xi \mid \xi x \in \mathfrak{H}\},\ x \in \mathfrak{M},\ \mathfrak{H} = (H \cap S)^{\natural} \cap \mathfrak{M},\ H \text{ offenes Linksideal aus } S^*,$$

einen Basisfilter. Wir können $L = L(x, \mathfrak{H})$ als Ideal in S^* aber auch durch

$$L(x, \mathfrak{H}) = \{\xi \mid \xi \varphi^{-1}(x) \in H \cap M\} = \{\xi \mid \xi \varphi^{-1}(x) \in H\}$$

definieren. Wegen der Stetigkeit der Rechtsmultiplikation ist L dann ein offenes Linksideal aus S^*, die Topologie von $S^{(\alpha)}$ ist also höchstens gröber als die von S^*. Ist umgekehrt L ein offenes Linksideal aus S^*, so liegen fast alle $e_{1\mu}$ in L, etwa alle bis auf $e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1k}$. Das Ideal

$$H = \{x \mid x e_{1i} \in L \cap M,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

ist offen in S^*, das Ideal

$$L' = \{\xi \mid \xi \varphi(e_{i1}) \in H^{\natural} \cap \mathfrak{M},\ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

also offen in $S^{(\alpha)}$. Für $x \in L'$ gilt $x\varphi(e_{i1}) \in H^{\natural} \cap \mathfrak{M}$, also $x e_{i1} \in H$ für $i = 1, \ldots, k$. Daraus folgt $x e_i = x e_{i1} e_{1i} \in H e_{1i} < L$ für $i = 1, \ldots, k$, also $x = \sum_\mu x e_\mu \in L$, d.h. $L' < L$. Folglich ist L auch in $S^{(\alpha)}$ offen. Damit ist $S^* = S^{(\alpha)}$ topologisch und algebraisch bewiesen. Im ganzen haben wir gezeigt:

Satz 10. *Ein vollständiger linear topologischer Ring S^* mit Eins ist genau dann Matrixring $S^{(\mathfrak{a})}$ vom Grade $\mathfrak{a}$ über einem vollständigen linear topologischen Ring S mit Eins, wenn S^* ein System von Matrixeinheiten $\{e_{\mu\nu}\}$ vom Grade $\mathfrak{a}$ enthält. Dabei ist S isomorph zu den Unterringen $e_{\mu\nu}S^*e_{\nu\mu}$ von S^*.*

Ist S_0 ein beliebiger vollständiger l.t. Ring und $\mathfrak{a}$ eine Kardinalzahl, so wissen wir, daß $S^*=S_0^{(\mathfrak{a})}$ den Voraussetzungen von Satz 10 genügt, es ist also $S^*=S^{(\mathfrak{a})}$ mit $S=e_1S^*e_1$. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß der Ring S, der hier dem Ring S_0 eindeutig zugeordnet wird, nichts anderes ist als der Ring $S_0^{(1)}$ der hyperstetigen Endomorphismen von $S_0=\mathfrak{M}(S_0,1)$, versehen mit der üblichen Topologie. Es gilt also die Formel (wir lassen den Index 0 wieder weg):

$$S^{(\mathfrak{a})}=S^{(1)(\mathfrak{a})}. \tag{3.11}$$

Es gilt sogar die allgemeinere Formel

$$S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}=S^{(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})}, \tag{3.12}$$

wobei $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ das Produkt der Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist und die rechte Seite den Matrixring vom Grade $\mathfrak{b}$ über $S^{(\mathfrak{a})}$ bedeutet. Zum Beweis von (3.12) darf man wegen (3.11) voraussetzen, daß S eine Eins enthält.

Wir können die Matrixeinheiten $e_{(\alpha,\mu)(\beta,\nu)}$ von $S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}$ durch Paare (α,μ) indizieren, in denen α eine Indexmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{b}$ und μ eine der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ durchläuft. Die Elemente $e_{\alpha\beta}=\sum\limits_{\mu} e_{(\alpha,\mu)(\beta,\mu)}=\sum\limits_{\mu} e_{(\alpha,\mu)(1,1)}e_{(1,1)(\beta,\mu)}$ bilden dann ein neues System von Matrixeinheiten vom Grade $\mathfrak{b}$. Dementsprechend ist $S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}=S'^{(\mathfrak{b})}$ mit $S'=e_1S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}e_1$, $e_1=\sum\limits_{\mu} e_{(1,\mu)}$. S' enthält das System von Matrixeinheiten $e^{\mu\nu}=e_{(1,\mu)(1,\nu)}$, dessen Grad gleich $\mathfrak{a}$ ist. Aus Satz 10 folgt wieder $S'=S''^{(\mathfrak{a})}$ mit $S''=e^1S'e^1=e_{(1,1)}S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}e_{(1,1)}=S$, d.h. $S^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}=S^{(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})}$ wie behauptet.

Enthält S eine Eins, so sind S und $S^{(1)}$ nach (3.9) isomorph, aus der Definition von $(S)_{\mathfrak{a}}$ folgt nämlich unmittelbar $(S)_1\cong S$.

Wir wollen nun untersuchen, welche abgeschlossenen zweiseitigen Ideale in $S^{(\mathfrak{a})}$ existieren. Dazu setzen wir voraus, daß S eine Eins enthält, nach (3.9) ist dann $S^{(\mathfrak{a})}=(S)_{\mathfrak{a}}$. Sei $\{e_\mu\}$ das Teilsystem der orthogonalen Idempotente eines Systems von Matrixeinheiten von $S^{(\mathfrak{a})}$. Man sieht leicht:

$$S^{(\mathfrak{a})}=\sum_{\mu} S^{(\mathfrak{a})}e_\mu \qquad \textit{(Tychonoffsche Summe)}. \tag{3.13}$$

Für $x\in S^{(\mathfrak{a})}$ gilt $x=\sum\limits_{\mu} xe_\mu\in\sum\limits_{\mu} S^{(\mathfrak{a})}e_\mu$. Umgekehrt ist jedes System $\{x_\mu e_\mu\}$ mit beliebigen $x_\mu\in S^{(\mathfrak{a})}$ summierbar. Aus $x=\sum x_\mu e_\mu=0$ folgt $x_\nu e_\nu=xe_\nu=0$ für alle ν. Ist L ein offenes Linksideal in $S^{(\mathfrak{a})}$, so liegen fast alle $S^{(\mathfrak{a})}e_\mu$ in L und es gilt $\sum\limits_{\mu}(S^{(\mathfrak{a})}e_\mu)\cap L<L$, d.h. L ist auch als Teil von $\sum\limits_{\mu} S^{(\mathfrak{a})}e_\mu$ offen. Schließlich ist $L'=\sum\limits_{i=1}^{k}(S^{(\mathfrak{a})}e_{\mu_i})\cap L\oplus\sum\limits_{\mu\neq\mu_i} S^{(\mathfrak{a})}e_\mu$ das Ideal aller $x\in S^{(\mathfrak{a})}$ mit $xe_{\mu_i}\in L$, $i=1,\ldots,k$, d.h. L' ist auch in $S^{(\mathfrak{a})}$ offen. Aus allem folgt (3.13).

Nach (3.10) sind die einzelnen Summanden $M_\mu = S^{(\mathfrak{a})} e_\mu$ alle zu $\mathfrak{M}(S, \mathfrak{a})$ isomorph. Ist A' ein zweiseitiges abgeschlossenes Ideal von $S^{(\mathfrak{a})}$, so folgt $A' e_\mu \subset A' \cap M_\mu$, also $\sum_\mu A' e_\mu \subset A'$, umgekehrt natürlich auch $A' \subset \sum_\mu A' e_\mu$, folglich $A' = \sum_\mu A' e_\mu$. Durch $x e_\mu \to x e_\mu e_{\mu\nu}$, $x \in A'$, wird $A' e_\mu$ isomorph auf $A' e_\nu$ abgebildet, die Summanden $A' e_\mu$ sind also alle isomorph und bestimmen deshalb eindeutig einen Untermodul $\mathfrak{A} = A^\natural \cap \mathfrak{M}$ von $\mathfrak{M}$, welcher wiederum eindeutig durch ein Ideal $A \subset S$ definiert ist. Wegen $e_\mu A' e_\mu \cdot e_\mu S e_\mu \subset e_\mu A' e_\mu$ ist $\mathfrak{A}$ ein S-Untermodul von $\mathfrak{M}$, d.h. A ist ein zweiseitiges Ideal aus S. Zeichnen wir ein Idempotent $e = e_1$ aus und identifizieren S mit $e S^{(\mathfrak{a})} e$, so ist offenbar $A = e A' e \subset S$. Umgekehrt definiert ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal A aus S einen S-Untermodul $\mathfrak{A} = A^\natural \cap \mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{M}$, d.h. ein abgeschlossenes Unterideal $A' e \subset S^{(\mathfrak{a})} e$ mit $A' e S \subset A' e$. Das Ideal $A' = \sum_\mu A' e_1 e_{1\mu} = \sum_\mu A' e_\mu$ ist dann abgeschlossen in $S^{(\mathfrak{a})}$, denn alle $A' e_\mu$ sind in $S^{(\mathfrak{a})} e_\mu$ abgeschlossen. Ist $x e_{1\mu} \in A' e_\mu$, $x \in A' e_1$, so folgt für jedes $y = \sum_\nu y e_\nu \in S^{(\mathfrak{a})}$:

$$x e_{1\mu} y = \sum_\nu x e_{1\mu} y e_{\nu 1} e_{1\nu} = \sum_\nu y_\nu e_{1\nu} \quad \text{mit} \quad y_\nu = x e_{1\mu} y e_{\nu 1} \in A' e_1,$$

d.h. $x e_{1\mu} y \in A'$. Folglich ist A' zweiseitig. Im ganzen haben wir also bewiesen:

Satz 11. *Ist S ein vollständiger linear topologischer Ring mit Eins und $S^{(\mathfrak{a})}$ der Matrixring vom Grade $\mathfrak{a}$ über S, so entsprechen die abgeschlossenen zweiseitigen Ideale aus $S^{(\mathfrak{a})}$ umkehrbar eindeutig den abgeschlossenen zweiseitigen Idealen aus S. Ist e eine idempotente Matrixeinheit aus $S^{(\mathfrak{a})}$ und identifizieren wir S mit $e S^{(\mathfrak{a})} e$, so wird die Beziehung zwischen den zweiseitigen Idealen hergestellt durch die Zuordnung*

$$\overline{S^{(\mathfrak{a})} A S^{(\mathfrak{a})}} = A' \leftrightarrow e A' e = A$$

(A' zweiseitiges Ideal aus $S^{(\mathfrak{a})}$, A zweiseitiges Ideal aus S). Beschreiben wir $S^{(\mathfrak{a})}$ durch Matrizen, so besteht A' aus allen Matrizen $(a_{\mu\nu})$ mit $a_{\mu\nu} \in A$.

Wir wenden uns nun wieder den linear kompakten Ringen zu.

(3.14) *Ist R ein (i.e.S.) l.k. Ring und $e \neq 0$ ein Idempotent aus R, so ist auch eRe ein (i.e.S.) l.k. Ring. (Vgl. [9], 5. B.)*

Ist A Linksideal aus eRe, so ist $\overline{RA}$ Linksideal aus R und $A = e\overline{RA}$. Ist nun $\boldsymbol{F} = \{x + A\}$ ein Filter abgeschlossener Restklassen aus eRe, so ist $\boldsymbol{F}' = \{x + \overline{RA}\}$ ein Filter in R und es existiert ein $z \in \downarrow \boldsymbol{F}'$. Liegt $x + \overline{RA}$ in $\boldsymbol{F}'$, so folgt $e(z - x) = ez - x \in e\overline{RA} = A$, also $ez \in x + A$, d.h. $ez \in \downarrow \boldsymbol{F}$. Folglich ist $\downarrow \boldsymbol{F} \neq \emptyset$, also eRe l.k.

Ist A ein Linksideal in eRe, so ist die Vereinigung aller R-Linksideale $X \subset Re$ mit $eX \subset A$ ein abgeschlossenes Linksideal $A' \subset Re$, welches $\overline{RA}$ enthält und für das $eA' = A$ gilt. Ist $A = eRe \cap L$ mit offenem Unterideal $L \subset Re$, so liegt L in A', ist also A in eRe offen, so ist A' in Re offen. Nun sei R i.e.S.l.k. und A ein offenes Linksideal in eRe. Durch $B \to B'$ wird der Verband der Oberideale B von A isomorph in den Verband der offenen

Oberideale des offenen Linksideals $A' \subset Re$ abgebildet. Da modulo A' die Minimalbedingung gilt, muß dann auch modulo A die Minimalbedingung gelten, d.h. auch eRe ist i.e.S.l.k..

Ist $R^{(\mathfrak{a})}$ ein l.k. Matrixring, so ist nach (3.14) der Ring $R^{(1)}$ l.k., ist $R^{(\mathfrak{a})}$ i.e.S.l.k., so auch $R^{(1)}$. Ist umgekehrt R ein l.k. Ring *und* $\mathfrak{a}$ *endlich*, so ist auch $\mathfrak{M}(R, \mathfrak{a})$ und folglich nach Satz L7 auch $R^{(\mathfrak{a})}$ l.k. Ist R i.e.S.l.k., so gilt nach (3.8) *für jedes* $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{M}(R, \mathfrak{a})$ die Minimalbedingung modulo offenen Untermoduln, $\mathfrak{M}$ ist also i.e.S.l.k.. Wieder nach Satz L7 ist dann auch $R^{(\mathfrak{a})}$ i.e.S.l.k.. Wir haben bisher gesehen: $R^{(\mathfrak{a})}$ ist genau dann i.e.S.l.k., wenn $R^{(1)}$ i.e.S.l.k. ist. Für *endliches* $\mathfrak{a}$ ist $R^{(\mathfrak{a})}$ genau dann l.k., aber nicht i.e.S.l.k., wenn $R^{(1)}$ l.k., aber nicht i.e.S.l.k. ist. Übriggeblieben ist also noch der folgende Fall: $R^{(1)}$ ist nicht i.e.S.l.k. und $\mathfrak{a}$ ist unendlich. Unter dieser Voraussetzung existiert in $R = R^{(1)}$ eine abzählbar unendliche echt absteigende Kette von Linksidealen $H_1 \supset H_2 \supset \cdots$ mit offenem Durchschnitt $H = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$. Die H_i bestimmen in $\mathfrak{M}$ die Kette der offenen Untermoduln $\mathfrak{H}_i = H_i^{\natural} \cap \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H} = H^{\natural} \cap \mathfrak{M} = \bigcap_i \mathfrak{H}_i$. Wir wählen nun in der Indexmenge der Summanden von $R^{\natural} = \sum_{\mu}^{\natural} R_\mu$ einen abzählbar unendlichen Teil $J = \{1, 2, \ldots\}$ und für jedes $i \in J$ ein nicht in H_{i-1} liegendes Element $h_i \in H_i$. Hiermit bilden wir den Filter

$$\boldsymbol{F} = \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu(h_\nu) + \mathfrak{H}_{n+1} \right\}_{n=1,2,\ldots}.$$

Angenommen, es existierte ein Element $x = \sum_{\mu}^{\natural} i_\mu(x_\mu) \in \downarrow \boldsymbol{F}$. Dann wäre $\sum_{\nu=1}^{\infty} i_\nu(h_\nu) \equiv x \pmod{\mathfrak{H}}$, also $x_i \equiv h_i \pmod{H}$ für alle $i \in J$. Da das der Summierbarkeit von $\{x_\mu\}_\mu$ widerspräche, muß $\downarrow \boldsymbol{F}$ leer sein. Folglich kann $\mathfrak{M}$ nicht l.k. sein. Da $\mathfrak{M}$ und $R^{(\mathfrak{a})}e$ nach (3.10) isomorph sind, ist dann auch $R^{(\mathfrak{a})}$ nicht l.k. Damit haben wir bewiesen:

Satz 12. *Sei R ein vollständiger linear topologischer Ring und $\mathfrak{a}$ eine Kardinalzahl. Der Matrixring $R^{(\mathfrak{a})}$ ist dann und nur dann im engeren Sinne linear kompakt, wenn $R^{(1)}$ im engeren Sinne linear kompakt ist. Für endliches $\mathfrak{a}$ ist $R^{(\mathfrak{a})}$ dann und nur dann linear kompakt, wenn $R^{(1)}$ linear kompakt ist. Ist $\mathfrak{a}$ unendlich und $R^{(1)}$ nicht im engeren Sinne linear kompakt, so ist $R^{(\mathfrak{a})}$ nicht linear kompakt.*

Ein l.k. Ring unendlichen Grades ist also stets i.e.S.l.k.. Satz 12 führt die Frage, für welche l.t. Ringe S die Matrixringe $S^{(\mathfrak{a})}$ l.k., bzw. i.e.S.l.k. sind, auf die Frage zurück, für welche S die Ringe $S^{(1)}$ der hyperstetigen Endomorphismen l.k., bzw. i.e.S.l.k. sind. Enthält S eine Eins, so ist $S^{(1)} = S$ und Satz 12 gibt die vollständige Antwort. Im allgemeinen Fall ist es jedoch möglich, daß $S^{(1)}$ (und dann also auch $S^{(\mathfrak{a})}$ für beliebiges $\mathfrak{a}$) i.e.S.l.k. ist, ohne daß S auch nur l.k. zu sein braucht. Sei etwa S eine diskrete abelsche p-Gruppe mit Elementen beliebig hoher Ordnung. Durch die Fest-

setzung $S^2=0$ wird S zum vollständigen l.t. Ring. Man sieht leicht, daß $S^{(1)}$ zum Ring der ganzen p-adischen Zahlen isomorph ist.

Schließlich wollen wir noch die Frage nach dem Radikal eines l.k. Matrixringes beantworten:

Satz 13. *Sei $R^{(\mathfrak{a})}$ ein linear kompakter Matrixring über dem linear kompakten Ring mit Einselement R. Ist N' das Radikal von $R^{(\mathfrak{a})}$ und N das Radikal von R, so entsprechen sich N' und N in der in Satz 11 beschriebenen Weise.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 12, da das Radikal eines l.k. Ringes mit Eins verbandstheoretisch als Durchschnitt der maximalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale gekennzeichnet ist.

Satz 13 wird falsch, wenn wir von $R^{(\mathfrak{a})}$ keine lineare Kompaktheit voraussetzen, selbst bei linear kompaktem R: Sei R der Ring der ganzen p-adischen Zahlen in der diskreten Topologie und $\mathfrak{a}=\aleph_0$. $R^{(\mathfrak{a})}=R^{(\aleph_0)}$ ist der Ring aller spaltenfiniten Matrizen mit abzählbar unendlich vielen Zeilen und Spalten. Nach Satz 12 sind die Ideale $p^i R^{(\mathfrak{a})}$, $i=0, 1, 2, \ldots$, und 0 die einzigen abgeschlossenen zweiseitigen in $R^{(\mathfrak{a})}$. Wir zeigen, daß kein $p^i R^{(\mathfrak{a})}$, $i=1, 2, \ldots$, quasiregulär ist. Dabei dürfen wir uns auf $i=1$ beschränken. $pR^{(\mathfrak{a})}$ enthält die Matrix (u_{ik}) mit $u_{i-1,i}=p$, $u_{ik}=0$ sonst. Ist 1 die Einheitsmatrix, so hat $1-u$ die inverse Matrix $1+v$ mit $v=(v_{ik})$, $v_{ik}=p^j$ für $i=k+j$, $v_{ik}=0$ sonst. Da die Matrix v als eindeutig bestimmte Quasiinverse zu u nicht in $R^{(\mathfrak{a})}$ liegt, ist u in $R^{(\mathfrak{a})}$ nicht quasiregulär, folglich ist auch $pR^{(\mathfrak{a})}$ nicht quasiregulär.

Wir wollen nun noch zeigen, daß $R^{(\mathfrak{a})}$ ein von 0 verschiedenes Radikal $\mathfrak{N}$ hat. Dazu genügt es, ein quasireguläres eigentliches zweiseitiges Ideal in $R^{(\mathfrak{a})}$ anzugeben. Ein solches ist das Ideal pE, wobei E das Ideal aller Matrizen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Zeilen ist. Liegt x in E, so auch alle Potenzen x^i und folglich auch $x'=x+px^2+p^2x^3+\cdots$. Das Element $-px'$ ist offenbar quasiinvers zu px, d.h. pE ist quasiregulär, liegt also in $\mathfrak{N}$. Damit ist gezeigt, daß das Radikal von $R^{(\mathfrak{a})}$ nicht abgeschlossen ist. Das Ideal E entspricht genau dem Ideal aller endlichwertigen linearen Transformationen — im Sinne von Jacobson — des Ringes aller linearen Transformationen eines Vektormoduls über einem Schiefkörper.

§ 4

Wir werden in diesem Paragraphen die Verallgemeinerung des Satzes von Artin über primäre Ringe mit Minimalbedingung für allgemeine l.k. Ringe beweisen. Ein l.k. Ring R mit Radikal N heißt *primär*[1]), wenn der Restklassenring R/N einfach, nach Satz L12 also voller Matrixring über einem Schiefkörper ist. Den Grad dieses Matrixringes bezeichnen wir auch als Grad von R. Hat R den Grad 1, ist also R/N ein Schiefkörper, so heißt R

[1]) Den Mißstand, den Terminus „primär" in dieser Arbeit in zwei verschiedenen Bedeutungen zu verwenden (vgl. §§ 5, 6), wird man nicht vermeiden können, wenn man die übliche Terminologie beibehalten will. Da wir die Bezeichnung „primär" im Sinne der Ringtheorie nur in diesem Paragraphen, im Sinne der Modultheorie nur in den §§ 5 und 6 verwenden, wird dieser Hinweis genügen, um Mißverständnisse auszuschließen.

vollständig primär. Nach ARTIN ist ein primärer Ring mit Einselement und Minimalbedingung Matrixring über einem vollständig primären Ring. Wir werden zeigen, daß ein i.e.S.l.k. primärer Ring mit Eins Matrixring über einem vollständig primären i.e.S.l.k. Ring ist. Für primäre l.k. Ringe unendlichen Grades ist dieses Ergebnis optimal, denn wir haben im vorigen Paragraphen gezeigt, daß ein l.k. Matrixring unendlichen Grades stets i.e.S.l.k. ist. Für endliche Grade dagegen gibt es l.k., nicht i.e.S.l.k. Matrixringe. In diesem Fall können wir auch etwas mehr zeigen: Ein primärer l.k. Ring mit Eins von endlichem Grade ist Matrixring über einem vollständig primären l.k. Ring, falls sein Radikal nilpotent ist ($\overset{*}{N}=0$). Ob es primäre l.k. Ringe ohne nilpotentes Radikal gibt, ist mir nicht bekannt. Die in § 2 konstruierten Ringe ohne nilpotentes Radikal sind alle nicht primär.

Um die genannten Sätze zu beweisen, genügt es nach Satz 10 zu zeigen, daß die betreffenden l.k. Ringe Systeme von Matrixeinheiten enthalten. Dabei werden wir natürlich so vorgehen, daß wir die Systeme der Matrixeinheiten der einfachen Restklassenringe nach den Radikalen zu Systemen der Ringe selbst „fortsetzen". Dabei besteht die Hauptschwierigkeit darin, die orthogonalen minimalen Idempotente fortzusetzen. Die Fortsetzbarkeit einzelner Idempotente ist allerdings sehr leicht zu zeigen:

(4.1) *Sei M ein nilpotentes zweiseitiges Ideal des l.k. Ringes R. In jeder idempotenten Restklasse $\bar{e}$ von R modulo M liegt ein idempotentes Element $e \in R$.*

Wir nehmen an, daß für alle $\mu < \lambda$ bereits Restklassen $e_\mu + \underset{\mu}{M}$ gefunden seien, so daß $\boldsymbol{M}_\lambda = \{e_\mu + \underset{\mu}{M}\}_{\mu<\lambda}$ ein Filter idempotenter Restklassen mit $e_\mu \in \bar{e}$ ist. Ist λ Limeszahl, so wählen wir ein Element $e_\lambda \in \downarrow \boldsymbol{M}_\lambda$ und erhalten die idempotente Restklasse $e_\lambda + \underset{\lambda}{M} < \downarrow \boldsymbol{M}_\lambda < \bar{e}$. Ist $\lambda = \varkappa + 1$, so ist $e_\varkappa^2 = e_\varkappa + q$ mit $q \in \underset{\varkappa}{M}$, also $q^2 \in \underset{\lambda}{M}$. Mit $e_\lambda = e_\varkappa - 2e_\varkappa q + q$ ist dann $e_\lambda + \underset{\lambda}{M}$ wieder idempotent und liegt in $\bar{e}$. Somit bekommen wir für jedes μ eine in $\bar{e}$ liegende idempotente Restklasse $e_\mu + \underset{\mu}{M}$. Ist $\underset{\zeta}{M} = 0$, so haben wir in $e = e_\zeta + \underset{\zeta}{M}$ das gewünschte idempotente Element aus R gefunden.

Ist R ein primärer l.k. Ring endlichen Grades mit Eins und nilpotentem Radikal N, so folgt aus (4.1) nach bekannten Schlüssen (vgl. [2], II, § 6), daß sich die endlich vielen orthogonalen minimalen Idempotente e_i des Restklassenringes R/N zu orthogonalen minimalen Idempotenten von R fortsetzen lassen. Ist der Grad von R nicht endlich, so interessiert, wie wir sahen, nur der Fall i.e.S.l.k. Ringe. Sei R deshalb im folgenden stets ein primärer i.e.S.l.k. Ring mit Einselement 1. Das Radikal N von R ist dann r-nilpotent und nach (4.1) lassen sich die Idempotente von R/N einzeln zu Idempotenten von R fortsetzen. Wir werden nun zeigen, daß sich minimale orthogonale Idempotente von R/N zu orthogonalen Idempotenten von R fortsetzen lassen. Wir nennen ein System orthogonaler Idempotente $e_\mu \in R$ ($\bar{e}_\mu \in R/N$) *vollständig*, wenn sie summierbar sind und $1 = \sum\limits_\mu e_\mu$ ist ($\bar{1} = \sum\limits_\mu \bar{e}_\mu$, $\bar{1}$ = Restklasse von 1 modulo N).

(4.2) *Sei* $\{e_\mu\}$ *ein vollständiges System orthogonaler Idempotente aus* R/N *und* $\{e_\mu\}$ *ein Vertretersystem von Elementen* $e_\mu \in \bar{e}_\mu$. $x = 0$ *ist das einzige Element aus* R *mit* $xe_\mu = 0$ *für alle* e_μ.

Ist $xe_\mu = 0$ für alle e_μ, so folgt $x \in N$. Angenommen, für $x \in N_\alpha$ und alle e_μ gilt $xe_\mu = 0$. Wir setzen $\mathfrak{N} = N_\alpha / N_{\alpha+1}$ und bezeichnen mit ξ die Restklasse von x in $\mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{N}N = 0$ ist $\mathfrak{N}$ ein R/N-Modul und für ξ gilt: $\xi \bar{e}_\mu = 0$ für alle $\bar{e}_\mu \in R/N$. Dann gilt auch $\xi \bar{s} = 0$ für alle endlichen Teilsummen $\bar{s}$ der $\bar{e}_\mu$. Da die Rechtsmultiplikationen mit den Elementen aus R/N stetig sind, ist dann auch $\xi = \xi \cdot \bar{1} = \xi \sum_\mu \bar{e}_\mu = 0$, d.h. $x \in N_{\alpha+1}$. Aus $x \in N_\alpha$ folgt also $x \in N_{\alpha+1}$, d.h. es ist $x = 0$.

Satz 14. *Ist* R *ein im engeren Sinne linear kompakter Ring mit Einselement,* N *sein Radikal,* $\{\bar{e}_\mu\}_{\mu \in I}$ *ein vollständiges System orthogonaler Idempotente des Restklassenringes* R/N, $\{e_\mu\}_{\mu \in I}$ *ein beliebiges System von idempotenten Vertretern* $e_\mu \in \bar{e}_\mu$, *so ist* R *direkte Summe der Rechtsideale* Re_μ:

$$R = \sum_\mu Re_\mu.$$

Bemerkung. Hier ist *nicht* vorausgesetzt, daß R primär ist!

Beweis. Wir müssen zeigen, daß für $x \in R$ durch

$$\varphi: \quad x \to \tilde{x} = \sum_\mu x e_\mu$$

ein Isomorphismus φ von R auf $\tilde{R} = \sum Re_\mu$ gegeben ist. Nach (4.2) ist φ ein stetiger Isomorphismus von R in $\tilde{R}$. Um $\varphi(R) = \tilde{R}$ zu zeigen, genügt es, nachzuweisen, daß $\varphi(R)$ in $\tilde{R}$ dicht liegt. Das ist sicher dann der Fall, wenn stets zu endlich vielen der e_μ, etwa $e_1, \ldots, e_k$, ein $z \in R$ existiert mit

$$(*) \qquad \varphi(z) = e_1 + \sum{}' u_\mu e_\mu, \qquad u_\mu \in N,$$

wobei in $\sum'$ über alle $\mu \neq 1, \ldots, k$ summiert wird. Für $k = 1$ können wir $z = e_1$ setzen. Wir nehmen nun an, daß für jede Wahl von $k-1$ der e_μ Elemente $z \in R$ existieren, so daß die $(*)$ entsprechenden Gleichungen gelten und wählen die Idempotente $e_1, \ldots, e_k$. Es gibt dann Elemente z^i, $i = 1, \ldots, k-1$, mit

$$\varphi(z^i) = e_i + v^i e_k + \sum{}' u_\mu^i e_\mu$$

mit $v^i, u_\mu^i \in N$. Weiter gilt

$$\varphi(e_k) = w_1 e_1 + \cdots + w_{k-1} e_{k-1} + e_k + \sum{}' w_\mu e_\mu, \quad w_\nu \in N,$$

also

$$\varphi\left(e_k - \sum_{i=1}^{k-1} w_i z^i\right) = \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} w_i v^i\right) e_k + \sum{}' w'_\mu e_\mu.$$

Wegen $\sum_1^{k-1} w_i z^i = w \in N$ existiert $r = (1-w)^{-1}$. Für $z^k = r\left(e_k - \sum_{i=1}^{k-1} w_i z^i\right)$ gilt dann

$$\varphi(z^k) = e_k + \sum{}' r w'_\mu e_\mu$$

und mit $z = z^1 - v^1 z^k$ also

$$\varphi(z) = e_1 + \sum{}' u_\mu e_\mu, \qquad u_\mu \in N.$$

Damit ist der Induktionsbeweis beendet und $\varphi(R) = \tilde{R}$ bewiesen. Da R i.e.S.l.k. ist, hat φ auch die notwendigen topologischen Eigenschaften.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 14 erhalten wir:

(4.3) *Ist $\overline{E} = \{\bar{e}_\mu\}$ ein (nicht notwendig vollständiges) System orthogonaler Idempotente von R/N, so ist jedes System $\{e_\mu\}$ von idempotenten Vertretern $e_\mu \in \bar{e}_\mu$ summierbar.*

Da wir $\{\bar{e}_\mu\}$ gegebenenfalls durch Hinzunahme von $\bar{1} - \sum_{\bar{e}_\mu \in \overline{E}} \bar{e}_\mu$ zu einem vollständigen System ergänzen können und jedes Teilsystem eines summierbaren Systems summierbar ist, dürfen wir annehmen, daß $\{\bar{e}_\mu\}$ vollständig ist. Dann ist $R = \sum_\mu R e_\mu$. Ist L offen, so liegen fast alle Re_μ und folglich fast alle $\{e_\mu\}$ in L.

Sei nun E_0 ein maximales System orthogonaler idempotenter Vertreter der $\bar{e}_\mu \in \overline{E}$. Die Existenz solch eines E_0 ist nach dem Satz von ZORN klar. Sei $\overline{E}_0$ die Menge der $\bar{e}_\mu \in \overline{E}$ mit Vertretern in E_0. Ist $\overline{E}_0 \neq \overline{E}$, so sei $\bar{e}$ ein nicht in $\overline{E}_0$ liegendes Element von $\overline{E}$, e ein idempotenter Vertreter aus $\bar{e}$ und $f = \sum_{e_\mu \in E_0} e_\mu$. Dann ist $e' = e - fe - ef + fef$ ein Vertreter von $\bar{e}$ mit $e_\mu e' = e' e_\mu = 0$ für alle $e_\mu \in E_0$. Ist $e'^2 = e' + q$, so ist $e'' = e' - 2e'q + q$ ein idempotenter Vertreter von e, für den ebenfalls $e_\mu e'' = e'' e_\mu = 0$ für $e_\mu \in E_0$ gilt. Folglich ist $E_0 \cup \{e''\}$ ein E_0 echt enthaltendes System orthogonaler idempotenter Vertreter. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\overline{E}_0 = \overline{E}$ sein muß:

(4.4) *Jedes System orthogonaler Idempotente des Restklassenringes R/N hat ein System orthogonaler idempotenter Vertreter in R.*

Der Restklassenring R/N nach dem Radikal ist halbeinfach, also nach Satz L13 direkte Summe einfacher l.k. Ringe R'_σ und die R'_σ sind nach Satz L12 direkte Summen minimaler Linksideale $H'_{\sigma\mu} = R'_\sigma \bar{e}_{\sigma\mu}$, wobei die $\bar{e}_{\sigma\mu}$ ein vollständiges System minimaler orthogonaler Idempotente von R'_σ bilden. $\{\bar{e}_{\sigma\mu}\}_{\sigma,\mu}$ ist also ein vollständiges System minimaler orthogonaler Idempotente von R/N und hat nach (4.4) ein System $\{e_{\sigma\mu}\}$ orthogonaler idempotenter Vertreter $e_{\sigma\mu} \in R$. Die $e_{\sigma\mu}$ sind natürlich auch unzerlegbar, desgleichen die von den $e_{\sigma\mu}$ erzeugten Linksideale $Re_{\sigma\mu}$. Anwendung von (4.4) und Satz 14 ergibt

Satz 15. *Ein im engeren Sinne linear kompakter Ring R mit Eins ist direkte Summe unzerlegbarer Linksideale $A_\mu = Re_\mu$, welche von minimalen orthogonalen Idempotenten e_μ erzeugt werden:*

$$R = \sum_\mu R e_\mu, \qquad e_\mu e_\nu = e_\mu \delta_{\mu\nu}.$$

Wir setzen jetzt voraus, daß R i.e.S.l.k., primär vom Grade $\mathfrak{a}$ ist und eine Eins enthält. Ist N das Radikal, so ist also $R/N = \Delta^{(\mathfrak{a})}$ ein Matrixring vom Grade $\mathfrak{a}$ über einem Schiefkörper Δ. R/N enthält ein System von Matrix-

einheiten $\{\bar{e}_{\mu\nu}\}$ und R enthält nach (4.4) ein summierbares System $\{e_\mu\}$ orthogonaler idempotenter Vertreter der $\bar{e}_\mu \in \{e_{\mu\nu}\}$.

(4.5) *Sei R ein primärer l.t. Ring mit Eins und abgeschlossenem Radikal N und $\{\bar{e}_{\mu\nu}\}$ ein System von Matrixeinheiten des Restklassenringes R/N. Ist $\{e_\mu\}$ ein summierbares System orthogonaler idempotenter Vertreter der $\bar{e}_\mu$, so kann man $\{e_\mu\}$ zu einem System $\{e_{\mu\nu}\}$ von Matrixeinheiten $e_{\mu\nu} \in \bar{e}_{\mu\nu}$ von R ergänzen.*

Wir wählen einen festen Index 1, Vertreter $f_{\mu 1} \in \bar{e}_{\mu 1}$, $f_{1\mu} \in \bar{e}_{1\mu}$ und setzen $e_{1\mu} = e_1 f_{1\mu} e_\mu$. Dann ist $e_{1\mu}$ Vertreter von $\bar{e}_{1\mu}$ und es gilt $f_{\mu 1} e_{1\mu} = e_\mu \pmod N$, also $f_{\mu 1} e_{1\mu} = e_\mu + r_\mu = (1 + r_\mu) e_\mu$ mit $r_\mu \in N$. Setzen wir $e_{\mu 1} = e_\mu (1 + r_\mu)^{-1} f_{\mu 1} e_1$, so haben wir also Vertreter $e_{\mu 1}$, $e_{1\mu}$ gefunden mit $e_{\mu 1} e_{1\mu} = e_\mu$ für alle μ. Aus $(e_1 - e_{1\mu} e_{\mu 1})^2 = e_1 - e_{1\mu} e_{\mu 1} \in N$ folgt schließlich $e_1 - e_{1\mu} e_{\mu 1} = 0$, d.h. $e_{1\mu} e_{\mu 1} = e_1$. Man rechnet leicht nach, daß $e_{\mu\nu} = e_{\mu 1} e_{1\nu}$ das gewünschte Vertretersystem ergibt.

Aus unseren Ergebnissen folgt nun, daß ein primärer i.e.S.l.k. Ring R mit Einselement, bzw. ein primärer l.k. Ring R endlichen Grades mit nilpotentem Radikal und Einselement Matrixring $R_0^{(a)}$ über einem i.e.S.l.k. Ring R_0, bzw. l.k. Ring R_0 mit Einselement ist. Hierbei können wir noch R_0 mit eRe identifizieren, wobei e ein minimales, d.h. unzerlegbares Idempotent aus R ist. Da das Radikal N von R maximal ist, muß nach Satz 11 auch das Radikal N_0 von R_0 maximal sein, d.h. R_0 ist primär. Da das Einselement e aus R_0 unzerlegbar ist, muß R_0 dann sogar vollständig primär sein.

Wir fassen die letzten Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen:

Satz 16. *Ein primärer im engeren Sinne linear kompakter Ring R mit Eins ist Matrixring über einem vollständig primären im engeren Sinne linear kompakten Ring R_0 mit Eins.*

Ein primärer linear kompakter Ring R endlichen Grades mit Eins und nilpotentem Radikal ist Matrixring über einem vollständig primären linear kompakten Ring R_0 mit Eins.

Ist e ein unzerlegbares Idempotent von R und identifizieren wir R_0 mit eRe, so ist $eNe = N_0$ das Radikal von R_0, falls N das Radikal von R ist. Umgekehrt ist $N = \overline{RN_0R}$. Beschreiben wir R durch Matrizen mit Elementen aus R_0, so besteht N aus allen Matrizen mit Elementen aus N_0.

§ 5

Nach Prüfer heißt $\mathfrak{R}$ Servanzuntergruppe der (gewöhnlichen) abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn jede in $\mathfrak{G}$ lösbare Gleichung $r = nx$ mit $r \in \mathfrak{R}$ und natürlichem n schon in $\mathfrak{R}$ lösbar ist. Seit einiger Zeit hat sich statt des Ausdrucks Servanzuntergruppe die bequemere Bezeichnung „reine Untergruppe" eingebürgert. Man kann diesen Begriff sofort auf beliebige Operatormoduln verallgemeinern:

Definition. Sei $\mathfrak{M}$ ein Modul mit einem Linksoperatorenbereich Λ. Ein Λ-invarianter Untermodul $\mathfrak{R}$ heißt *rein*, wenn jede in $\mathfrak{M}$ lösbare Gleichung $r = \lambda x$ mit $r \in \mathfrak{R}$ und $\lambda \in \Lambda$ schon in $\mathfrak{R}$ lösbar ist.

Ist $\mathfrak{A}$ reiner Untermodul von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ reiner Untermodul von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{B}$ reiner Untermodul von $\mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{A}$ rein in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{U}$ ein Zwischenmodul:

$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{U} \subset \mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{A}$ auch reiner Untermodul in $\mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{R}$ rein in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{A}$ Untermodul von $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{R}/\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ rein. Hiervon gilt die Umkehrung natürlich nicht, desgleichen wird im allgemeinen das Erzeugnis von zwei reinen Untermoduln nicht rein sein, selbst dann nicht, wenn es direkt ist. Beispiele für reine Untermoduln sind die direkten Summanden. Ist $\mathfrak{M}$ topologisch, so wird man im allgemeinen nur abgeschlossene Untermoduln betrachten. Es kann dann der Fall eintreten, daß ein abgeschlossener Untermodul $\mathfrak{R}$ *algebraisch* direkter Summand ist, d.h. daß ein nicht notwendig abgeschlossener Untermodul $\mathfrak{R}'$ existiert, derart, daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}(+)\mathfrak{R}'$ ist. Eine solche Zerlegung ist natürlich hinreichend für die Reinheit von $\mathfrak{R}$. Ist $\Lambda =$ Menge der ganzen rationalen Zahlen und $\mathfrak{M}$ kompakt, so ist eine derartige direkte Zerlegbarkeit umgekehrt auch notwendig für die Reinheit der Untergruppe, mit anderen Worten: Eine abgeschlossene Untergruppe einer kompakten abelschen Gruppe ist genau dann rein, wenn sie algebraisch direkter Summand ist.

Der Begriff des reinen Untermoduls scheint nur dann fruchtbar zu sein, wenn A kommutativ ist. In diesem Falle sind nämlich die Untermoduln $\mathfrak{U}_\lambda = \{x \mid \lambda x = 0\}$ A-invariant. Wir werden uns deshalb in diesem Paragraphen im wesentlichen auf die Untersuchung l.k. Moduln mit kommutativem Operatorenbereich beschränken.

Wir betrachten von nun an wieder l.k. Moduln. Sei R ein Ring, $\mathfrak{M}$ ein l.k. R-Modul und $\mathfrak{A} = \sum_\mu \mathfrak{A}_\mu$ eine vollständige direkte Summe von l.k. R-Moduln $\mathfrak{A}_\mu$.

Definition. Ein stetiger R-Homomorphismus φ von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{A}$ heißt *rein*, wenn $\mathfrak{M}$ zu jedem μ einen *nicht notwendig abgeschlossenen* Untermodul $\mathfrak{H}_\mu$ enthält, der durch φ isomorph auf $\mathfrak{A}_\mu$ abgebildet wird, d.h.: Ist $\mathfrak{K}$ der Kern von φ, so existiert zu jedem μ ein Untermodul $\mathfrak{H}_\mu \subset \mathfrak{M}$ mit

$$\varphi(\mathfrak{H}_\mu) = \mathfrak{A}_\mu, \qquad \mathfrak{H}_\mu \cap \mathfrak{K} = 0.$$

Wir wollen im folgenden stets voraussetzen, daß der Ring R kommutativ und l.k. ist. Wir benötigen für unsere Untersuchungen den Ring Ω *aller*, d.h. auch der unstetigen mit R vertauschbaren Endomorphismen von $\mathfrak{M}$. Schreiben wir die Endomorphismen $A, B, \ldots \in \Omega$ als Rechtsoperatoren, so gilt also $\varrho x \cdot A = \varrho \cdot xA$ für $\varrho \in R$, $x \in \mathfrak{M}$. Wegen der Kommutativität von R ist durch $x \cdot \varrho A = \varrho xA$ für $\varrho \in R$ und $A \in \Omega$ ein Endomorphismus ϱA aus Ω definiert, Ω ist also ein R-Modul. Seien $x_1, \ldots, x_k$ endlich viele Elemente und $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul aus $\mathfrak{M}$. Die Menge aller $A \in \Omega$ mit $x_i A \in \mathfrak{U}$, $i = 1, \ldots, k$, ist ein R-Untermodul $Y(x_1, \ldots, x_k; \mathfrak{U})$ von Ω. Wir wählen das System $\boldsymbol{B}_\Omega$ aller dieser Untermoduln Y als Basisfilter einer Topologie in Ω. Dadurch wird Ω zu einem l.t. R-Modul.

(5.1) *Ω ist ein l.k. R-Modul.*

Sei $Y = Y(x_1, \ldots, x_k; \mathfrak{U}) \in \boldsymbol{B}_\Omega$ und $A \in \Omega$. Durch

$$A \to \iota(A) = x_1 A \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{U}) + \cdots + x_k A \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{U})$$

ist ein R-Homomorphismus ι von Ω in die diskrete l.k. k-gliedrige direkte

Summe $\mathfrak{M}/\mathfrak{U} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}/\mathfrak{U} = \mathfrak{M}'$ gegeben, dessen Kern gleich Y ist. Folglich ist Ω/Y zu einem Untermodul von $\mathfrak{M}'$ isomorph, also ebenfalls ein diskreter l.k. R-Modul. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, daß Ω vollständig ist. Sei $\boldsymbol{C} = \{A + Y(x_1, \ldots, x_k; \mathfrak{U})\}$ ein Cauchyfilter in Ω und $x \in \mathfrak{M}$. Das System $\boldsymbol{C}_x$ aller Restklassen $xA + \mathfrak{U}$, für die $A + Y(x; \mathfrak{U})$ in $\boldsymbol{C}$ liegt, ist ein Cauchyfilter in $\mathfrak{M}$. Durch $xC = \lim \boldsymbol{C}_x$ ist also eine Abbildung C von $\mathfrak{M}$ in sich definiert. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß C in Ω liegt und $C = \lim \boldsymbol{C}$ ist. Im allgemeinen wird Ω kein topologischer Ring sein, jedoch ist für jedes $A \in \Omega$ die Linksmultiplikation mit A ein stetiger R-Endomorphismus von Ω, wie aus der Formel $A \cdot Y(xA; \mathfrak{U}) < Y(x; \mathfrak{U})$ folgt.

Sei jetzt A ein System l.k. R-Moduln. Für jedes Teilsystem $B < A$ bilden wir die direkte Summe $\mathfrak{S}_B = \sum_{\mathfrak{A} \in B} \mathfrak{A}$ und bezeichnen mit A^A die Menge aller dieser $\mathfrak{S}_B$. Wir betrachten dann die Menge $\boldsymbol{\Phi}^* = \boldsymbol{\Phi}^*(\mathfrak{M}, A)$ aller stetigen Homomorphismen von $\mathfrak{M}$ auf Moduln aus A^A und definieren genau wie in [6] in $\boldsymbol{\Phi}^*$ eine Ordnung: Sind $\varphi, \psi \in \boldsymbol{\Phi}^*$, $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S}_B$, $\psi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S}_C$, so bedeute $\varphi < \psi$, daß B echter Teil von C und $\varphi = \pi\psi$ ist, wobei π die Projektion von $\mathfrak{S}_C$ auf $\mathfrak{S}_B$ ist.

Sei $\varkappa = \{\varphi\}$ eine Kette aus $\boldsymbol{\Phi}^*$, $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S}_{B_\varphi}$ für $\varphi \in \varkappa$, $B = \bigcup_{\varphi \in \varkappa} B_\varphi$ und $\hat{\varkappa}$ die Menge aller $\psi \in \boldsymbol{\Phi}^*$ mit $\varphi \leqq \psi$ für alle $\varphi \in \varkappa$. Es ist leicht zu sehen, daß $\hat{\varkappa}$ genau ein kleinstes ψ enthält, d.h. es gibt ein $\psi = \sup \varkappa = \sup_{\varphi \in \varkappa} \varphi$ in $\boldsymbol{\Phi}^*$ mit $\varphi \leqq \psi$ für alle $\varphi \in \varkappa$ und $\psi \leqq \psi'$ für alle $\psi' \in \hat{\varkappa}$. ψ bildet $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{S}_B$ ab. Die Beweise für diese Behauptungen findet man im wesentlichen in [6].

Mit $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\mathfrak{M}, A)$ bezeichnen wir jetzt das Teilsystem aller *reinen* Homomorphismen aus $\boldsymbol{\Phi}^*$. Ist $\varkappa$ eine Kette aus $\boldsymbol{\Phi}$, so existiert $\sup \varkappa$ in $\boldsymbol{\Phi}^*$, es ist aber von vornherein nicht gesagt, daß $\sup \varkappa$ auch in $\boldsymbol{\Phi}$ liegt, es könnte z.B. Ketten $\varkappa \in \boldsymbol{\Phi}$ mit $\hat{\varkappa} \cap \boldsymbol{\Phi} = \emptyset$ geben.

Um Weitschweifigkeiten zu vermeiden, nennen wir im folgenden $\varphi \in \boldsymbol{\Phi}^*$ *direkt*, wenn der Kern $\mathfrak{K} = \varphi^{-1}(0)$ algebraischer direkter Summand von $\mathfrak{M}$ ist; es gibt dann also eine Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}(+)\mathfrak{K}$ mit einem unter Umständen nicht abgeschlossenen Untermodul $\mathfrak{H}$. Zu dieser Zerlegung gehört dann die Projektion $P \in \Omega$ von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{H}$. Es ist klar, daß ein direkter Homomorphismus stets rein ist. Wir betrachten nun die Menge $\Pi = \Pi(\mathfrak{M}, A)$ der Paare (φ, P), in denen φ ein direkter Homomorphismus aus $\boldsymbol{\Phi}$ mit dem Kern $\mathfrak{K}$ und P eine Projektion aus Ω ist, derart daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}P(+)\mathfrak{K}$ ist. Wir ordnen nun auch Π: $(\varphi, P) < (\varphi', P')$ soll bedeuten: $\varphi < \varphi'$ und $P = PP' = P'P$. Ist K eine Kette aus Π, so bilden die zu K gehörigen φ eine Kette $\varkappa(K)$ in $\boldsymbol{\Phi}$. Wir setzen $\varphi_K = \sup \varkappa(K)$.

(5.2) *Ist K eine Kette aus Π, so ist φ_K direkt und es existiert eine zu φ_K gehörige Projektion $P_K \in \Omega$, so daß $(\varphi, P) \leqq (\varphi_K, P_K)$ gilt für alle $(\varphi, P) \in K$.*

Beweis. Sei E die identische Transformation aus Ω. Ist $\mu = (\varphi_\mu, P_\mu) \in K$, so setzen wir $P'_\mu = E - P_\mu$. Die P'_μ sind dann auch Projektionen und $\mathfrak{K}_\mu = \mathfrak{M}P'_\mu$ ist der Kern von φ_μ. Der Untermodul $\Omega P'_\mu$ besteht aus allen $A \in \Omega$ mit $\mathfrak{M}A < \mathfrak{K}_\mu$, ist also abgeschlossen. Da die Linksmultiplikation mit P'_μ stetig,

Ω l.k. und $\Omega P'_\mu$ abgeschlossen ist, ist auch $\Omega_\mu = P'_\mu \Omega P'_\mu$ abgeschlossen. Für $\mu < \nu$ gilt nach Voraussetzung $P_\nu - P_\mu = P'_\mu (P_\nu - P_\mu) P'_\mu$, also $P_\mu \equiv P_\nu \pmod{\Omega_\mu}$. Ist ferner $\mathfrak{K} = \bigcap_\mu \mathfrak{K}_\mu$ der Kern von φ_K, so gilt $\mathfrak{K} P_\mu = 0$ für alle $\mu \in K$; bezeichnen wir mit Θ den abgeschlossenen Untermodul aller $A \in \Omega$ mit $\mathfrak{K} A = 0$, so ist also

$$\boldsymbol{P} = \{P_\mu + \Omega_\mu \cap \Theta\}$$

ein Filter in Θ. Wir wählen ein $P_K \in \downarrow \boldsymbol{P}$. Wegen $P_\mu - P_K \in \Omega_\mu$ haben wir $P_\mu (P_\mu - P_K) = 0$, $(P_\mu - P_K) P_\mu = 0$, d.h. $P_\mu = P_\mu P_K = P_K P_\mu$.

Sei $\varphi_K(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S} \in A^\Delta$. Zu $s \in \mathfrak{S}$ wählen wir ein $x \in \mathfrak{M}$ mit $\varphi_K(x) = s$. Aus $\varphi_\mu(x) = \varphi_\mu(x P_\mu) = \varphi_\mu(x P_K P_\mu) = \varphi_\mu(x P_K)$ folgt dann $\varphi_K(x P_K) = s$, also $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} P_K + \mathfrak{K}$. Ist $z P_K \in \mathfrak{K}$, so folgt wegen $\varphi_K(z) = \varphi_K(z P_K) = 0$ auch $z \in \mathfrak{K}$, also $z P_K = 0$, d.h. $\mathfrak{M} P_K \cap \mathfrak{K} = 0$: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} P_K (+) \mathfrak{K}$. Wegen $\mathfrak{K} P_K = 0$ ist P_K die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M} P_K$. Damit ist (5.2) bewiesen.

Wegen (5.2) ist $\Pi(\mathfrak{M}, A)$ induktiv geordnet. Sei $(\varphi, P) \in \Pi$ und $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S} \in A^\Delta$. Ist φ nicht maximal in Φ, so existiert ein $\mathfrak{A} \in A$ und ein $\psi \in \Phi$ mit $\psi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{A}$, $\varphi < \psi$. Ist $\mathfrak{K} = \varphi^{-1}(0)$, so ist $\psi(\mathfrak{K}) = \mathfrak{A}$. Da ψ rein ist, existiert ein Untermodul $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{K}$, der von ψ isomorph auf $\mathfrak{A}$ abgebildet wird. Daraus folgt $\mathfrak{K} = \mathfrak{H} (+) \mathfrak{K}'$ mit $\mathfrak{K}' = \psi^{-1}(0) \cap \mathfrak{K}$, also

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} P (+) \mathfrak{H} (+) \mathfrak{K}'.$$

Ist nun P' die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M} P (+) \mathfrak{H}$, so ist $P = P P' = P' P$ und folglich $(\varphi, P) < (\psi, P')$, d.h. (φ, P) kann in Π nicht maximal sein oder umgekehrt: Ist (φ, P) maximal in Π, so ist φ maximal in Φ. Hieraus folgt das erste Hauptergebnis dieses Paragraphen:

Satz 17. *Sei $\mathfrak{M}$ ein linear kompakter Modul in bezug auf den kommutativen Ring R und φ ein stetiger Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf die direkte Summe $\mathfrak{A} = \sum_\mu \mathfrak{A}_\mu$ der linear kompakten R-Moduln $\mathfrak{A}_\mu$. φ ist dann und nur dann rein, wenn sein Kern algebraischer direkter Summand von $\mathfrak{M}$ ist.*

Natürlich brauchen wir nur zu beweisen, daß für reines φ der Kern $\mathfrak{K}$ direkter Summand von $\mathfrak{M}$ ist. Sei A das System der Summanden $\mathfrak{A}_\mu$. Offensichtlich ist φ größer als alle anderen Elemente aus $\Phi = \Phi(\mathfrak{M}, A)$, d.h. φ ist das einzige maximale Element aus Φ. Ist nun (ψ, P) maximal in $\Pi(\mathfrak{M}, A)$, so muß also $\varphi = \psi$ und folglich $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} P (+) \mathfrak{K}$ sein. Damit ist der Satz schon bewiesen. Fast ebenso einfach folgt der Beweis des zweiten Hauptergebnisses:

Satz 18. *Ist R ein kommutativer Ring, $\mathfrak{M}$ ein linear kompakter R-Modul und A ein System linear kompakter R-Moduln, so ist die Menge $\Phi(\mathfrak{M}, A)$ der reinen Homomorphismen von $\mathfrak{M}$ auf Moduln aus A^Δ induktiv geordnet.*

Sei $\varkappa$ eine maximale Kette aus Φ, d.h. eine Kette aus Φ, die in keiner anderen Kette echt enthalten ist. Das System $\Pi_\varkappa$ der $(\varphi, P) \in \Pi = \Pi(\mathfrak{M}, A)$, für welche φ in $\varkappa$ liegt, ist dann in Π induktiv abgeschlossen, d.h. ist K eine Kette aus $\Pi_\varkappa$, so liegt mit passendem P_K auch (φ_K, P_K) in $\Pi_\varkappa$. Sei nun (ψ, Q) ein Element aus $\Pi_\varkappa$ und $\varphi \in \varkappa$ mit $\psi < \varphi$. Ist $\varphi(\mathfrak{M}) = \psi(\mathfrak{M}) \oplus \mathfrak{B}$ und

$\mathfrak{K}$ der Kern von ψ, so ist $\varphi(\mathfrak{K}) = \mathfrak{B}$. Da φ ein reiner Homomorphismus von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{B}$ ist, muß nach Satz 17 der Kern $\mathfrak{H}$ von φ direkter Summand von $\mathfrak{K}$ sein: $\mathfrak{K} = \mathfrak{Q}(+)\mathfrak{H}$. Daraus folgt

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\,Q\,(+)\,\mathfrak{Q}\,(+)\,\mathfrak{H} = \mathfrak{M}\,P\,(+)\,\mathfrak{H},$$

wobei P die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}\,Q\,(-)\,\mathfrak{Q}$ ist. Folglich ist $(\psi, Q) < (\varphi, P) \in \Pi_{\varkappa}$. Wählen wir nun ein maximales $(\varphi, P) \in \Pi_{\varkappa}$, so ist also $\varphi' \leq \varphi$ für alle $\varphi' \in \varkappa$, d.h. es ist $\varphi = \sup \varkappa$. Da $\varphi^{-1}(0)$ direkter Summand ist, liegt φ in $\boldsymbol{\Phi}$. Eine beliebige Kette $\varkappa$ ist stets in einer maximalen Kette $\varkappa'$ enthalten, wegen $\sup \varkappa \leq \sup \varkappa'$ ist dann auch $\sup \varkappa$ rein. Damit ist Satz 18 bewiesen.

Wir hatten in [6] die reinen Homomorphismen etwas anders definiert, und zwar hatten wir den Homomorphismus φ von $\mathfrak{M}$ auf $\sum_{\mu} \mathfrak{A}_{\mu}$ rein genannt, wenn zu jedem μ eine *abgeschlossene* Untergruppe von $\mathfrak{M}$ durch φ isomorph auf $\mathfrak{A}_{\mu}$ abgebildet wird. Die Induktivität eines Systems $\boldsymbol{\Phi}(\mathfrak{M}, A)$ reiner Homomorphismen haben wir dann nur gezeigt für den Fall, daß $\mathfrak{M}$ eine Prüfersche Gruppe ist und $\mathfrak{A}$ nur aus einrangigen Gruppen besteht. Da aber einrangige Prüfersche Gruppen stets abgeschlossen sind, ist Satz (4.5) aus [6] in der Tat ein Spezialfall unseres Satzes 18. Der Beweis von Satz (4.5) benutzte wesentlich die spezielle Struktur des Ringes der ganzen p-adischen Zahlen (eine Prüfersche Gruppe von endlichem Exponenten ist kompakt), er ließ sich also z. B. nicht übertragen auf l.k. Moduln über vollständigen diskreten Bewertungsringen (= kommutativen nullteilerfreien i.e.S.l.k. Ringen, deren Radikal Hauptideal ist). Satz 18 umfaßt diese Fälle selbstverständlich auch. Da fast alle Ergebnisse aus [6], § 5 Folgerungen aus Satz (4.5) waren, können wir diese Sätze nun für beliebige l.k. Moduln $\mathfrak{M}$ über einem vollständigen diskreten Bewertungsring B aussprechen. Wie man Ordnung, Höhe, Einrangigkeit usw. in diesem Falle zu definieren hat, ist ziemlich selbstverständlich: Ist (p) das Radikal von B, so hat $x \in \mathfrak{M}$ die Höhe l (genauer den Höhenexponenten l), wenn x in $p^l\mathfrak{M}$ und nicht in $p^{l+1}\mathfrak{M}$ liegt, und die Höhe ∞, wenn x in $\bigcap_l p^l\mathfrak{M}$ liegt. Entsprechend definiert man die Ordnung. Ist K_B der Quotientenkörper von B, so sind die B-Untermoduln von K_B und K_B/B genau die einrangigen B-Moduln.

Von den in [6], § 5 bewiesenen Sätzen formulieren wir hier nur

Satz 19. *Sei B ein vollständiger diskreter Bewertungsring. Jeder linear kompakte B-Modul $\mathfrak{M}$ ist zweistufig direkt zerlegbar: $\mathfrak{M}$ ist entweder direkte Summe einrangiger B-Moduln oder $\mathfrak{M}$ enthält einen torsionsfreien reinen Untermodul $\mathfrak{K}$, so daß $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}$ einrangig direkt zerlegbar sind. $\mathfrak{K}$ ist dabei Kern eines reinen Homomorphismus.*

Für l.k. Moduln über diskreten Bewertungsringen gilt zum Teil auch die Umkehrung von Satz (4.5) aus [6]:

Satz 20. *Ein Homomorphismus φ eines linear kompakten Moduls $\mathfrak{M}$ über einem vollständigen diskreten Bewertungsring B auf eine direkte Summe einrangiger B-Moduln ist genau dann rein, wenn sein Kern $\mathfrak{K}$ rein ist.*

Wir können uns im Beweis von Satz 20 darauf beschränken, daß $\mathfrak{M}/\mathfrak{K} = \mathfrak{A}$ einrangig ist, und zwar zu $Q = K_B/B$ isomorph, die anderen Fälle sind trivial oder lassen sich leicht auf diesen Fall zurückführen. Ist p ein Primelement von B, d.h. erzeugt p das Radikal von B, so sind die $p^i\mathfrak{M}$, $i = 1, 2, \ldots$, abgeschlossene B-Untermoduln, desgleichen $\mathfrak{M}^\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} p^i\mathfrak{M}$. Aus Satz L 1 folgt leicht $p\mathfrak{M}^\infty = \mathfrak{M}^\infty$ (man setze in Satz L 1 für φ die Abbildung $x \to px$ und $\boldsymbol{R} = \{p^i\mathfrak{M}\}_i$). Da $\mathfrak{K}$ rein ist, gilt:

$$(*) \qquad \mathfrak{K}^\infty = \bigcap_i p^i\mathfrak{K} = \bigcap_i (\mathfrak{K} \cap p^i\mathfrak{M}) = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{M}^\infty.$$

Da $\mathfrak{M}^\infty \not\subset \mathfrak{K}$ ist, folgt aus $\mathfrak{M}/\mathfrak{K} \cong Q$: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^\infty + \mathfrak{K}$. Wir können also einen einrangigen zu B oder Q isomorphen Untermodul $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{M}^\infty$ so wählen, daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{a} + \mathfrak{K}$ ist. Ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{K} = 0$, so ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{K}$ und wir sind fertig. Ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{K} = (a) \neq 0$, so liegt das Element a wegen $(*)$ in $\mathfrak{K}^\infty$. Wegen $p\mathfrak{K}^\infty = \mathfrak{K}^\infty$ liegt dann a in einem zu $\mathfrak{a}$ isomorphen Untermodul $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{K}^\infty$. Dabei wirkt der Isomorphismus α zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ auf $(a) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$ identisch. Setzen wir $\mathfrak{b} = \{x - \alpha(x)\}_{x \in \mathfrak{a}'}$, so ist also $\mathfrak{M} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{K}$. Damit ist Satz 20 bewiesen. Aus den letzten beiden Sätzen folgt:

Satz 21. *Ist $\mathfrak{M}$ ein linear kompakter Modul über einem vollständigen diskreten Bewertungsring, so ist jeder abgeschlossene reine Untermodul von $\mathfrak{M}$ algebraisch direkter Summand.*

Beweis. Sei $\mathfrak{N}$ ein reiner abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$. Nach Satz 19 ist $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ zweistufig einrangig direkt zerlegbar, d.h.: Es gibt einen reinen Untermodul $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{M}$, so daß $\mathfrak{M}/\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}/\mathfrak{N}$ einrangig direkt zerlegbar sind. Nach Satz 20 sind die entsprechenden Homomorphismen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{K}$ also rein. Nach Satz 17 ist deshalb $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}(+)\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K} = \mathfrak{L}(+)\mathfrak{N}$. Folglich ist mit $\mathfrak{Q} = \mathfrak{H}(+)\mathfrak{L}$: $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}(+)\mathfrak{N}$. Damit ist Satz 21 bewiesen. Spezialfall:

(5.3) *Jede reine abgeschlossene Untergruppe einer abelschen kompakten total unzusammenhängenden Gruppe ist algebraisch direkter Summand.*

Dieser Satz gilt übrigens auch, wie ich an anderer Stelle zeige, ohne die Voraussetzung über den Zusammenhang der Gruppe[1]).

§ 6

Wir wollen jetzt die Dualitätstheorie linear topologischer Moduln über einem vollständigen diskreten Bewertungsring B entwickeln. Dabei werden wir uns durchweg kurz fassen können, da die Abweichungen vom Fall B = ganze p-adische Zahlen im allgemeinen gering sind und dieser Fall ausführlich in [6] und [7] behandelt worden ist.

Von jetzt an sei B ein vollständiger diskreter Bewertungsring. Wir wählen ein festes Primelement p von B, (p) ist dann das Radikal von B. K sei der Quotientenkörper von B und $Q = K/B$ der Restklassenmodul von K modulo B.

[1]) LEPTIN, H.: Eine Kennzeichnung der reinen Untergruppen abelscher Gruppen. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **7**, 169—171 (1956).

Q ist ein diskreter B-Modul mit der Struktur der Prüferschen Gruppe $Z(p^\infty)$. Unter einem *Charakter* eines topologischen B-Moduls $\mathfrak{M}$ verstehen wir einen stetigen Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in Q. Da Q diskret ist, gilt:

(6.1) *Ein Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in Q ist genau dann ein Charakter, wenn sein Kern offen ist.*

Von nun an betrachten wir nur noch l.t. B-Moduln, insbesondere sei $\mathfrak{M}$ ein für allemal ein l.t. B-Modul.

(6.2) *Ist $\mathfrak{A}$ ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so läßt sich jeder Charakter χ_0 von $\mathfrak{A}$ zu einem Charakter χ von $\mathfrak{M}$ fortsetzen.*

Der Kern $\mathfrak{K}$ von χ_0 in $\mathfrak{A}$ ist offen, es gibt also einen maximalen offenen Untermodul $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{K}$. Wegen $\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{U} \cong (\mathfrak{A} + \mathfrak{U})/\mathfrak{U}$ können wir χ_0 als Charakter von $\mathfrak{A} + \mathfrak{U}$ betrachten, der Kern ist dann gleich $\mathfrak{U}$. Nun ist $\chi_0(\mathfrak{A} + \mathfrak{U}) = \chi_0(\mathfrak{A}) \subset B$, aus der Maximalität von $\mathfrak{U}$ folgt dann leicht, daß $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ zu einem Untermodul von B isomorph ist. Daraus erhält man eine Fortsetzung von χ_0 auf $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ und somit auf $\mathfrak{M}$.

(6.3) *$\mathfrak{M}$ hat genügend viele Charaktere, d.h. zu jedem von 0 verschiedenem $x \in \mathfrak{M}$ existiert ein x nicht annullierender Charakter.*

Beweis wie üblich.

Ist $\mathfrak{L}$ ein l.k. Untermodul von $\mathfrak{M}$, so sind alle Untermoduln $p^i\mathfrak{L}$, $i = 1, 2, \ldots$, abgeschlossen, folglich auch $\mathfrak{L}^\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} p^i\mathfrak{L}$. Wir nennen $\mathfrak{L}^\infty$ den *Wurzeluntermodul* von $\mathfrak{L}$ und sagen, $\mathfrak{L}$ sei *wurzelfrei*, falls $\mathfrak{L}^\infty = 0$ ist. Wie bei den Prüferschen Gruppen gilt auch hier $p\mathfrak{L}^\infty = \mathfrak{L}^\infty$. Mit $K = K_{\mathfrak{M}}$ bezeichnen wir das System aller l.k. wurzelfreien Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ liegt auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ in K, ferner liegen alle von endlich vielen Elementen erzeugten Untermoduln in K. Mit Hilfe von K erklären wir nun im B-Modul $\hat{\mathfrak{M}}$ aller Charaktere von $\mathfrak{M}$ eine lineare Topologie:

Das System $\hat{\boldsymbol{B}} = \{\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K})\}_{\mathfrak{K} \subset K}$ aller Annullatoren der Moduln $\mathfrak{K} \in K$ sei Basisfilter der Topologie in $\hat{\mathfrak{M}}$.

Wegen $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K} + \mathfrak{H}) = \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K}) \cap \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{H})$ ist $\hat{\boldsymbol{B}}$ ein Filter, wegen $(x) \in K$ für alle $x \in \mathfrak{M}$ ist $\downarrow \hat{\boldsymbol{B}} = 0$, die Topologie also separiert. Trivialerweise besteht $\hat{\boldsymbol{B}}$ aus B-Untermoduln, $\hat{\mathfrak{M}}$ ist also ein l.t. B-Modul. Ist $\mathfrak{A}$ Untermodul von $\mathfrak{M}$, so ist der Annullator $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A})$ in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen.

Sei $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}/\mathfrak{U}$. Der Annullator $\hat{\mathfrak{N}} = \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{U})$ ist algebraisch zur Charaktergruppe von $\mathfrak{M}'$ isomorph. Da $\mathfrak{M}'$ diskret ist, besteht das System $K' = K_{\mathfrak{M}'}$ der wurzelfreien l.k. Untermoduln von $\mathfrak{M}'$ genau aus den endlichen Untermoduln von $\mathfrak{M}'$. Unter einem *endlichen* B-Modul verstehen wir dabei hier und im folgenden stets einen endlich erzeugbaren periodischen (d.h. jedes Element wird von einer endlichen Potenz von p annuliert) B-Modul. Es folgt, daß K' aus allen Moduln $(\mathfrak{K} + \mathfrak{U})/\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{K} \in K_{\mathfrak{M}}$ besteht, so daß $\hat{\mathfrak{N}}$ auch topologisch zur Charaktergruppe von $\mathfrak{M}'$ isomorph ist. Aus der Diskretheit von $\mathfrak{M}'$ schließt man wie üblich auf die lineare Kompaktheit von $\hat{\mathfrak{N}}$. Ein Element der Ordnung p^i

aus $\mathfrak{M}'$ wird von $p^i\hat{\mathfrak{N}}$, also erst recht von $\hat{\mathfrak{N}}^\infty$ annulliert. Da $\mathfrak{M}'$ periodisch ist, muß dann $\hat{\mathfrak{N}}^\infty = 0$ sein. Damit ist gezeigt:

(6.4) *Die Annullatoren $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{U})$ der offenen Untermoduln $\mathfrak{U}$ aus $\mathfrak{M}$ sind l.k. und wurzelfrei. Insbesondere sind die Charaktermoduln diskreter B-Moduln l.k. und wurzelfrei.*

Ist $x \in \mathfrak{M}$, so bezeichnen wir mit $x\hat{y}$ den Wert von x für $\hat{y} \in \hat{\mathfrak{M}}$. $x\hat{y}$ ist eine Bilinearform mit Werten in Q, die bei festem $x \in \mathfrak{M}$ einen Charakter $\omega(x)$ von $\hat{\mathfrak{M}}$ definiert. Wegen (6.3) ist ω ein algebraischer Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$. Ein Cauchyfilter in $\omega(\mathfrak{M})$ ist zu einem Filter

$$\boldsymbol{C}' = \{\omega(x_\mu) + \omega(\mathfrak{M}) \cap \hat{\hat{\mathfrak{N}}}(\hat{\mathfrak{K}}_\mu)\}$$

äquivalent, wobei $\hat{\mathfrak{K}}_\mu$ die l.k. wurzelfreien Untermoduln von $\hat{\mathfrak{M}}$ durchläuft. Ist $\mathfrak{H}_\mu$ der von $\hat{\mathfrak{K}}_\mu$ in $\mathfrak{M}$ annullierte Untermodul, so ist $\omega(\mathfrak{H}_\mu) = \omega(\mathfrak{M}) \cap \hat{\hat{\mathfrak{N}}}(\hat{\mathfrak{K}}_\mu)$ und $\boldsymbol{C}' = \{\omega(x_\mu + \mathfrak{H}_\mu)\} = \omega(\boldsymbol{C})$ mit $\boldsymbol{C} = \{x_\mu + \mathfrak{H}_\mu\}$. Offenbar ist $\boldsymbol{C}$ ein Filter. Ist $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so ist $\hat{\mathfrak{K}} = \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{U})$ nach (6.4) l.k. und wurzelfrei, wegen (6.3) ist $\mathfrak{U}$ genau der von $\hat{\mathfrak{K}}$ annullierte Untermodul von $\mathfrak{M}$, folglich liegt eine Restklasse von $\mathfrak{U}$ in $\boldsymbol{C}$, d.h. $\boldsymbol{C}$ ist Cauchyfilter. Wenn $\mathfrak{M}$ vollständig ist, existiert also $\lim \boldsymbol{C} = c$ und deshalb auch $\lim \boldsymbol{C}' = \omega(c)$, d.h. $\omega(\mathfrak{M})$ ist dann auch vollständig, insbesondere also abgeschlossen in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$.

Ist $\mathfrak{M}$ l.k. und wurzelfrei, so ist $\hat{\mathfrak{M}}$ ein diskreter Torsionsmodul, nach (6.4) ist also $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ wieder l.k. und wurzelfrei. Ferner sieht man, daß die offenen Untermoduln von $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ genau die Annullatoren endlicher Untermoduln von $\hat{\mathfrak{M}}$ sind. $\mathfrak{M}' = \omega(\mathfrak{M})$ ist in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ abgeschlossen. Ist $\hat{\hat{\mathfrak{U}}} = \hat{\hat{\mathfrak{U}}}(\hat{\mathfrak{K}})$ ein offener Obermodul von $\mathfrak{M}'$, so folgt $\hat{\mathfrak{K}}\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}\hat{\mathfrak{K}} = 0$, also $\hat{\mathfrak{K}} = 0$, also $\hat{\hat{\mathfrak{U}}} = \hat{\hat{\mathfrak{M}}}$, also $\mathfrak{M}' = \hat{\hat{\mathfrak{M}}}$, d.h. ω bildet $\mathfrak{M}$ isomorph auf $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ ab. Sei nun $\mathfrak{M}$ wieder beliebig linear topologisch und $\hat{\hat{y}} \in \hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ ein Charakter von $\hat{\mathfrak{M}}$. Der Kern von $\hat{\hat{y}}$ in $\hat{\mathfrak{M}}$ ist offen, enthält also den Annullator $\hat{\mathfrak{N}} = \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K})$ eines l.k. wurzelfreien Untermoduls $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{M}$. Der diskrete Faktormodul $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{N}}$ ist wegen (6.2) zum Charaktermodul von $\mathfrak{K}$ kanonisch isomorph; da wir eben gesehen haben, daß für l.k. wurzelfreie Moduln ω eine Abbildung *auf* ist, wird also der von $\hat{\hat{y}}$ auf $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{N}}$ induzierte Charakter auch von einem Element y aus $\mathfrak{K}$ induziert. Offenbar ist dann $\hat{\hat{y}} = \omega(y)$. Folglich ist ω auch allgemein eine Abbildung auf. Ist $\mathfrak{A}$ ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so folgt aus (6.3) die Formel

$$(*) \qquad \omega(\mathfrak{A}) = \hat{\hat{\mathfrak{N}}}\left(\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A})\right).$$

Ist $\mathfrak{U}$ ein offener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so ist $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{U})$ nach (6.4) l.k. und wurzelfrei, $\hat{\hat{\mathfrak{N}}}\left(\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{U})\right) = \omega(\mathfrak{U})$ also wieder offen, d.h. ω ist eine offene Abbildung. Aus $(*)$ folgt ferner, daß mit $\mathfrak{A}$ auch $\omega(\mathfrak{A})$ in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ abgeschlossen ist. Ist umgekehrt $\hat{\hat{\mathfrak{A}}} = \omega(\mathfrak{A})$ in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ abgeschlossen und $\hat{\hat{x}} = \omega(x) \notin \hat{\hat{\mathfrak{A}}}$, so gibt es ein $\hat{y} \in \hat{\mathfrak{M}}$ mit

$\hat{y}\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\hat{y} = 0$, $\hat{y}\hat{\hat{x}} = x\hat{y} \neq 0$, x kann also kein Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ sein, d.h. $\mathfrak{A}$ ist abgeschlossen. Ist $\mathfrak{A}$ l.k. und $\boldsymbol{F}'$ ein Filter abgeschlossener Restklassen in $\mathfrak{A}' = \omega(\mathfrak{A})$, so ist $\boldsymbol{F} = \omega^{-1}(\boldsymbol{F}')$ ein Filter abgeschlossener Restklassen in $\mathfrak{A}$, also $\downarrow \boldsymbol{F} \neq \emptyset$ und folglich auch $\downarrow \boldsymbol{F}' \neq \emptyset$, d.h. mit $\mathfrak{A}$ ist auch $\mathfrak{A}'$ l.k. Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

Satz 22. *Sei $\mathfrak{M}$ ein linear topologischer B-Modul. $\hat{\mathfrak{M}}$ der Charaktermodul von $\mathfrak{M}$ und $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ der Charaktermodul von $\hat{\mathfrak{M}}$. Die kanonische Abbildung ω ist ein offener Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$. Ist $\mathfrak{A}$ ein Untermodul von $\mathfrak{M}$, so ist $\omega(\mathfrak{A})$ genau dann abgeschlossen, bzw. linear kompakt, wenn $\mathfrak{A}$ abgeschlossen, bzw. linear kompakt ist.*

Satz 22 besagt, daß für einen beliebigen l.t. B-Modul „fast" der Dualitätsatz gilt. Daß der Dualitätsatz jedoch nicht immer gilt, zeigten wir schon in [7]. Genau wie dort, können wir nun auch hier beweisen:

Satz 23 (Dualitätsatz). *Sei $\mathfrak{M}$ ein linear topologischer B-Modul. ω ist dann und nur dann ein topologisch-algebraischer Isomorphismus, wenn jeder abgeschlossene Untermodul $\mathfrak{U}$ aus $\mathfrak{M}$ mit periodischem Faktormodul und lauter abgeschlossenen Obermoduln in $\mathfrak{M}$ offen ist.*

Die Bedingung ist hinreichend: Ist $\mathfrak{U}'$ in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ offen und $\omega^{-1}(\mathfrak{U}') = \mathfrak{U}$, so sind nach Satz 22 alle Obermoduln von $\mathfrak{U}$ abgeschlossen, da alle Obermoduln von $\mathfrak{U}'$ in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ abgeschlossen sind. Folglich ist $\mathfrak{U}$ offen, ω also stetig.

Die Bedingung ist notwendig: Sei $\mathfrak{U}$ und jeder Obermodul von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen und $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ periodisch. Der Annullator $\hat{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{U}$ in $\hat{\mathfrak{M}}$ ist l.k. und wurzelfrei. Das folgt genau wie (6.4), wenn man noch beachtet, daß jeder l.k. Untermodul von $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ endlich sein muß. Da nun der Annullator $\hat{\hat{\mathfrak{U}}}$ von $\hat{\mathfrak{R}}$ in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}$ einerseits offen, zum anderen gleich $\omega(\mathfrak{U})$ ist, muß $\mathfrak{U} = \omega^{-1}(\hat{\hat{\mathfrak{U}}})$ offen sein, falls ω topologisch ist.

Wir nennen wie in [7] $\mathfrak{M}$ *linear diskret*, wenn jeder Untermodul von $\mathfrak{M}$ mit periodischem Faktormodul offen ist. $\mathfrak{M}$ heißt *lokal linear kompakt*, wenn es einen l.k. Untermodul mit linear diskretem Faktormodul enthält.

Satz 24. *Ist $\mathfrak{M}$ ein lokal linear kompakter (linear kompakter, linear diskreter) B-Modul, so ist der Charaktermodul $\hat{\mathfrak{M}}$ lokal linear kompakt (linear diskret, linear kompakt) und es gilt der Dualitätsatz. Genauer: Ist $\mathfrak{U}$ ein linear kompakter Untermodul von $\mathfrak{M}$ mit linear diskretem Faktormodul $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}/\mathfrak{U}$, so ist der Annullator $\hat{\mathfrak{V}}$ von $\mathfrak{U}$ in $\hat{\mathfrak{M}}$ linear kompakt und $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{V}}$ ist linear diskret. Außerdem ist $\hat{\mathfrak{V}} \cong \hat{\mathfrak{F}}$ und $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{V}} \cong \hat{\mathfrak{U}}$.*

Beweis. Bezeichnungen wie im Satz. Ist $\mathfrak{W}$ ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$ mit periodischem Faktormodul und lauter abgeschlossenen Obermoduln, so ist $(\mathfrak{U} + \mathfrak{W})/\mathfrak{W}$ l.k. und hat lauter abgeschlossene Untermoduln, muß also endlich sein. $\mathfrak{M}/(\mathfrak{U} + \mathfrak{W})$ ist als periodischer linear diskreter Modul diskret, $\mathfrak{U} + \mathfrak{W}$ also offen. Folglich ist auch $\mathfrak{W}$ offen, die Bedingung des Dualitätsatzes also erfüllt.

Jeder Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ in Q ist ein Charakter und die l.k. Untermoduln von $\mathfrak{F}$ sind genau die endlich erzeugten. Daraus folgt, ähnlich wie (6.4), daß $\hat{\mathfrak{B}}$ der Charaktermodul von $\mathfrak{F}$ und l.k. ist. Um die Isomorphie von $\hat{\mathfrak{U}}$ und $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{B}}$ zu zeigen, beweisen wir zunächst:

(6.5) *Ist $\mathfrak{A}$ ein l.k. und $\mathfrak{B}$ ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$, so gilt für die Annullatoren* $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A}) + \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{B}) = \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$.

Weil $\mathfrak{A}$ l.k. ist, ist das algebraische Erzeugnis $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ abgeschlossen und es gilt $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{B}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, ein Charakter $\hat{z} \in \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ läßt sich also in der Form $\hat{z} = \hat{x} + \hat{y}$ mit $\mathfrak{B}\hat{x} = \mathfrak{A}\hat{y} = 0$ darstellen. Daraus folgt $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) \subset \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A}) + \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{B})$. Da $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A}) + \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{B}) \subset \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ trivial ist, folgt (6.5).

In $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{B}}$ bilden die Untermoduln $(\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K}) + \hat{\mathfrak{B}})/\hat{\mathfrak{B}}$ mit $\mathfrak{K} \in K_{\mathfrak{M}}$ ein Basisfilter. Wegen $\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K}) + \hat{\mathfrak{B}} = \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K}) + \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{U}) = \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K} \cap \mathfrak{U})$ entspricht $(\hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{K}) + \hat{\mathfrak{B}})/\hat{\mathfrak{B}}$ in $\hat{\mathfrak{U}}$ der offene Annullator von $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{U}$. Damit ist $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{B}} \cong \hat{\mathfrak{U}}$ gezeigt.

Wir können uns für den Rest des Beweises von Satz 24 auf die Untersuchung eines l.k. Moduls $\mathfrak{M}$ beschränken. Sei χ ein beliebiger B-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in Q. Auf den endlich erzeugten Untermoduln von $\mathfrak{M}$ induziert χ Charaktere, welche sich zu Charakteren von $\mathfrak{M}$ fortsetzen lassen. Dadurch wird in $\hat{\hat{\mathfrak{M}}} = \mathfrak{M}$ ein Cauchyfilter definiert, dessen Limes offenbar gleich χ ist, d.h.: Jeder Homomorphismus von $\hat{\mathfrak{M}}$ in Q ist ein Charakter, jeder Untermodul von $\hat{\mathfrak{M}}$ also abgeschlossen [7]. Ist $\hat{\mathfrak{U}}$ ein Untermodul mit periodischem Faktormodul, so muß $\hat{\mathfrak{U}}$ Annullator eines wurzelfreien Untermoduls von $\mathfrak{M}$ sein, d.h. $\hat{\mathfrak{U}}$ ist offen. Folglich ist $\hat{\mathfrak{M}}$ linear diskret. Damit ist Satz 24 bewiesen.

Ist $\mathfrak{M}$ wieder ein beliebiger l.t. B-Modul, $\mathfrak{A}$ ein abgeschlossener Untermodul, $\hat{\mathfrak{B}} = \hat{\mathfrak{N}}(\mathfrak{A})$ der Annullator von $\mathfrak{A}$ in $\hat{\mathfrak{M}}$, so folgt aus (6.5) genau wie in [6], Beweis zu (6.8), die Isomorphie von $\hat{\mathfrak{A}}$ mit $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{B}}$. Gilt für $\mathfrak{M}$ der Dualitätsatz, so kann man die Rollen von $\mathfrak{M}$, bzw. $\mathfrak{A}$ und $\hat{\mathfrak{M}}$, bzw. $\hat{\mathfrak{B}}$ vertauschen, d.h. es ist dann $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ zu $\hat{\mathfrak{B}}$ isomorph. Nun folgt aus dem Kriterium des Dualitätsatzes, daß auch für $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ der Dualitätsatz gilt, folglich ist $\widehat{\mathfrak{M}/\mathfrak{A}}$ zu $\hat{\hat{\mathfrak{B}}} = \mathfrak{B}$ isomorph:

Satz 25. *Ist $\mathfrak{A}$ ein abgeschlossener Untermodul des linear topologischen B-Moduls $\mathfrak{M}$ und $\hat{\mathfrak{B}}$ der Annullator von $\mathfrak{A}$ im Charaktermodul $\hat{\mathfrak{M}}$, so gilt*

$$\hat{\mathfrak{A}} \cong \hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{B}}.$$

Gilt für $\mathfrak{M}$ der Dualitätsatz, so haben wir außerdem die Isomorphie

$$\widehat{\mathfrak{M}/\mathfrak{A}} \cong \mathfrak{B}.$$

Ebenso wie in [7] kann man zeigen, daß der Dualitätsatz genau für die Charaktermoduln l.t. B-Moduln gilt. Ist $\mathfrak{A}$ ein abgeschlossener Untermodul von $\mathfrak{M}$ und gilt der Dualitätsatz für $\mathfrak{M}$, so auch für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$. Schließlich

gilt der Dualitätsatz für eine tychonoffsche direkte Summe von B-Moduln genau dann, wenn er für jeden Summanden gilt.

Zusatz bei der Korrektur (1. Nov. 1956): Die Sätze des letzten Paragraphen gelten durchweg auch für l.t. Vektormoduln, d.h. sie gelten auch, falls B ein Schiefkörper ist. In diesem Falle ist $K = Q = B$ und ein Charakter des B-Moduls $\mathfrak{M}$ ist ein stetiger B-Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ in B. Die Topologisierung des Charaktermoduls (des dualen Moduls) erfolgt mit Hilfe der l.k. Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Die Begriffe „Wurzelmodul" usw. treten hier natürlich nicht auf, dadurch vereinfacht sich manches. Ist B ein kommutativer Körper, so sind die Sätze über B-Vektormoduln unmittelbare Folgerungen aus den vorliegenden Ergebnissen: Wir können B stets als Restklassenkörper eines diskreten Bewertungsringes $\tilde{B}$ auffassen, etwa des Ringes $B\{t\}$ aller formalen Potenzreihen in einer Unbestimmten t. Ein B-Modul ist dann nichts anderes als ein von t annullierter $\tilde{B}$-Modul. Vgl. G. M. Köthe, Lineare Räume mit linearer Topologie, Abstract from the Proceedings of the International Mathematical Congress Amsterdam, Sept. 1954.

Literatur

[1] Bourbaki, N.: Topologie generale, chap. III, IV. Paris 1942. — [2] Deuring, M.: Algebren. In Ergebnisse der Mathematik, Bd. 4. Berlin 1935. — [3] Fuchs, L.: On the Structure of Abelian p-Groups. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **4**, 267—288 (1953). — [4] Jacobson, N.: The Radical and Semi-Simplicity for arbitrary Rings. Amer. J. Math. **67**, 300—320 (1945). — [5] Lefschetz, S.: Algebraic Topology. New York 1942. — [6] Leptin, H.: Über eine Klasse linear kompakter abelscher Gruppen II. Abh. Math. Sem. Hamb. **19**, 221—243 (1954). — [7] Leptin, H.: Abelsche Gruppen mit kompakten Charaktergruppen und Dualitätstheorie gewisser linear topologischer abelscher Gruppen. Abh. Math. Sem. Hamb. **19**, 244—263 (1954). — [8] Leptin, H.: Linear kompakte Moduln und Ringe. Math. Z. **62**, 241—267 (1955). — [9] Zelinsky, D.: Raising idempotents. Duke Math. J. **21**, 315—322 (1954).

Hamburg, Math. Seminar der Universität

(Eingegangen am 21. April 1956)

Djerasimović, B.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 328—340 (1957)

Über die binären quadratischen Formen

Von

Božidar Djerasimović

I. Einleitung

1. Die geordneten Komplexe von natürlichen und von ganzen Zahlen und die Operationen mit diesen (Dj. [2], [3]) ermöglichen bei Anwendung von regelmäßigen Kettenbrüchen auf die Untersuchung der Eigenschaften von binären quadratischen Formen vollständigere Resultate zu bekommen. Diese Arbeit hat dies zum Zweck.

2. In weiteren Darlegungen benötigen wir den Begriff der *Normalform* der quadratischen Irrationalzahlen.

Definition. *Die quadratische Irrationalzahl*

$$\frac{\sqrt{D}+P}{Q}, \qquad \text{wobei} \begin{cases} D>0, & P \text{ und } Q \text{ ganze Zahlen,} \\ D & \text{kein Quadrat,} \end{cases}$$

ist in Normalform, wenn folgende Bedingungen

$$\frac{D-P^2}{Q}=Q_{-1}=\text{ganze Zahl}, \tag{1}$$

$$(Q;P;Q_{-1})=1 \tag{2}$$

befriedigt ist.

Durch Erweiterung oder Kürzung kann jede quadratische Irrationalzahl auf die Normalform reduziert werden (Perron [4], S. 66).

Die Gleichung

$$\frac{\sqrt{D}+P}{Q}=b+\frac{Q_1}{\sqrt{D}+P_1}, \qquad \text{wobei} \quad D-P^2=Q\,Q_{-1}, \quad b=\left[\frac{\sqrt{D}+P}{Q}\right]$$

ist, zerfällt in die Gleichungen

$$P_1=b\,Q-P,$$
$$Q_1=Q_{-1}+2b\,P-b^2\,Q,$$

wobei $D-P_1^2=Q_1\,Q$ ist, aus welchen dann die Gleichheit

$$(Q_1;P_1;Q)=(Q;P;Q_{-1})$$

folgt, so daß folgender Schluß ausgesprochen werden kann:

Ist eine quadratische Irrationalzahl in Normalform, dann sind — bei ihrer Entwicklung in einen regelmäßigen Kettenbruch — auch alle ihre vollständigen

Quotienten in Normalform. Und umgekehrt, wenn irgendein vollständiger Quotient in Normalform ist, dann ist auch die quadratische Irrationalzahl in solcher Form.

Es seien

$$\xi = \frac{\sqrt{D} - P}{Q}, \quad \omega = \frac{\sqrt{D} + p}{q} \qquad \text{wobei} \begin{cases} \dfrac{D - P^2}{Q} = Q_{-1} = \text{ganze Zahl}, \\ \dfrac{D - p^2}{q} = q_{-1} = \text{ganze Zahl}, \end{cases}$$

irgendwelche zwei zueinander äquivalente quadratische Irrationalzahlen. Aus der vorherigen Folgerung ergibt sich, daß sie immer die Bedingung

$$(Q; P; Q_{-1}) = (q; p; q_{-1}) \tag{3}$$

erfüllen.

3. Im Laufe der weiteren Ausführungen brauchen wir folgende Formeln

$$[A, 0] = [A'], \tag{4}$$

$$[A, \alpha] = -[A^*, -\alpha - 1], \tag{5}$$

wo A irgendeinen geordneten Komplex ganzer Zahlen bezeichnet, während α eine ganze Zahl ist. Aus der Gleichung

$$[A, \alpha] = \alpha[A] + [A']$$

für $\alpha = 0$ folgt die Formel (4). Da $[A, \alpha] = [A, \alpha - 1, 1]$ und $A, \alpha - 1, 1 \sim A^*$, $-\alpha - 1, 1, 0$ ist (Dj. [3], Formel (7)), so bekommt man aus der Formel (4) die Formel (5).

II. Hauptsätze

4. Es sei die binäre quadratische Form

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2, \quad \text{wobei} \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \text{ ganze Zahlen}, \\ (\alpha; \beta; \gamma) = 1, \\ D = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \text{ kein Quadrat}, \end{cases} \tag{6}$$

gegeben. Es seien ferner ξ und η $(\xi > \eta)$ die Wurzeln der Gleichung

$$f(\xi, 1) \equiv \alpha\xi^2 + 2\beta\xi + \gamma = 0, \tag{7}$$

und zwar

$$\xi = \frac{\sqrt{D} - \beta}{\alpha}, \quad \eta = \frac{-\sqrt{D} - \beta}{\alpha}, \tag{8}$$

und es seien ihre Kettenbruchentwicklungen

$$\begin{cases} \xi = (B\overline{A}), \\ \eta = (C\overline{\underline{A}}), \end{cases} \quad \text{wobei} \begin{cases} A = a_1 a_2 \dots a_m \text{ primitive Periode}, \\ B = b_1 b_2 \dots b_n, \ b_n \neq a_m, \\ C = c_1 c_2 \dots c_p \sim B|\underline{A}. \end{cases} \tag{9}$$

Die eingeführten Bezeichnungen werden im Laufe der ganzen weiteren Darlegung ungeändert beibehalten und deshalb weiter ohne besondere Hinweise verwendet.

5. Wenn wir uns auf die Betrachtung der Werte, welche die quadratische Form (6) *nur für ganzzahlige teilerfremde Werte der Veränderlichen x und y erhält*, beschränken, können wir diese Form passend und kondensiert ausdrücken. Nach (9) sind ξ und η die Wurzeln der Gleichung

$$['B\underline{C'}]\xi^2 - \{[B\underline{C'}] + ['B\underline{C}]\}\xi + [B\underline{C}] = 0 \tag{10}$$

(DJ. [3], Gl. (30)), woraus durch Vergleich mit der Gl. (7)

$$['B\underline{C'}] = \lambda\alpha, \quad [B\underline{C'}] + ['B\underline{C}] = -2\lambda\beta, \quad [B\underline{C}] = \lambda\gamma \tag{11}$$

erhalten wird, wo λ ein Proportionalitätsfaktor ist. Nach der Bedingung $(\alpha;\beta;\gamma) = 1$ ist 2λ stets eine ganze Zahl.

Da wir uns auf teilerfremde ganzzahlige Werte der Veränderlichen x und y beschränkt haben, können wir die Substitution

$$\frac{x}{y} = (Z)$$

durchführen, wo Z irgendein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen ist. Dabei schreiben wir statt $f([Z], ['Z])$ kurz $f(Z)$.

Nach (11) und (12) erhält die quadratische Form (6) die Gestalt

$$\lambda f(Z) = ['B\underline{C'}][Z]^2 - \{[B\underline{C'}] + ['B\underline{C}]\}[Z]['Z] + [B\underline{C}]['Z]^2,$$

d.h.

$$\lambda f(Z) = [Z]['B\underline{C}|Z] - ['Z][B\underline{C}|Z]$$

(DJ. [3], Formel (9)), und schließlich

$$f(Z) = -\frac{1}{\lambda}[\underline{Z}|B\underline{C}|Z]. \tag{13}$$

6. Ausgehend von der Gestalt (13) der quadratischen Form (6), beweisen wir

Satz 1. *Die ganzen Zahlen δ und $-\delta$ $(\delta > 0)$, oder nur eine von ihnen, können dann und nur dann in der Gestalt der quadratischen Form*

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2, \quad \text{wobei} \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \text{ ganze Zahlen}, \\ (\alpha;\beta;\gamma) = 1, \\ D = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \text{ kein Quadrat}, \end{cases}$$

für teilerfremde ganzzahlige Werte der Veränderlichen x und y dargestellt werden, wenn δ der Nenner der Normalform einer quadratischen Irrationalzahl ist, die äquivalent einer der Wurzeln der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$ ist.

Beweis. Es sei

$$\omega_{-1} = \frac{\sqrt{D} + p_{-1}}{\delta} \tag{14}$$

die Normalform irgendeiner quadratischen Irrationalzahl, deren Nenner δ ist, und die äquivalent einer der Wurzeln der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$ ist. Dann haben, nach (9), die Kettenbrüche, die ω_{-1} und deren konjugierte Zahl ω'_{-1}

darstellen, die Form

$$\omega_{-1} = (a\underline{M}\bar{A}), \quad \omega'_{-1} = (a\underline{N}\bar{\underline{A}}), \tag{15}$$

wo a eine ganze Zahl ist, während M und N geordnete Komplexe sind, deren sämtliche Glieder natürliche Zahlen sind mit Ausnahme des letzten Gliedes in einem von ihnen, welches auch Null sein kann. Auf Grund der Gl. (30) der schon erwähnten Abhandlung (Dj. [3]) und der Gl. (3) bekommt man

$$\delta = \frac{1}{\lambda}(\underline{M}\,N], \tag{16}$$

wo λ den gleichen Wert wie in den Gln. (11) hat. Die Komplexe M und N sind aber nicht voneinander unabhängig, weil sie nach dem Satz 4 (Dj. [3]) die Äquivalenz

$$Na\,|\,a\underline{M} \sim A$$

befriedigen, d.h.

$$N\,|\,\underline{M} \sim A. \tag{17}$$

Da außerdem

$$\underline{C}\,|\,B \sim A$$

ist, erhalten wir durch Vergleich

$$\underline{C}\,|\,B \sim N\,|\,\underline{M}$$

und daraus

$$B\,|\,M \sim C\,|\,N \sim Z_0, \tag{18}$$

wo wir mit Z_0 den geordneten Komplex von natürlichen Zahlen bezeichnet haben, der den Komplexen $B\,|\,M$ und $C\,|\,N$ äquivalent ist. Aus der Äquivalenz (18) folgt

$$M \sim \underline{B}\,|\,Z_0, \quad N \sim \underline{C}\,|\,Z_0, \tag{19}$$

so daß die Gl. (16)

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}[\underline{Z_0}|\,B\underline{C}|\,Z_0], \quad \varepsilon = +1 \text{ oder } \varepsilon = -1, \tag{20}$$

wird, und daher aus (13)

$$f(Z_0) = -\varepsilon\delta, \quad \varepsilon = +1 \text{ oder } \varepsilon = -1. \tag{21}$$

Wenn es dagegen keine quadratische Irrationalzahl mit dem Nenner δ gibt, deren Kettenbruchentwicklung die Periode A oder $\underline{A}$ besitzt, dann bestehen weder die Komplexe M und N, welche die Äquivalenz (17) befriedigen, noch der Komplex Z_0, welcher beide Äquivalenzen (18) befriedigt. Das heißt die Zahl δ kann nicht in der Gestalt der quadratischen Form (6) dargestellt werden. Damit ist der Satz 1 vollständig bewiesen.

7. Betrachten wir jetzt die Folge der geordneten Komplexe von natürlichen Zahlen, die durch die Äquivalenz

$$Z_\nu \sim BA^{\nu-1}\underline{C}\,|\,Z_0, \quad \text{für } \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \tag{22}$$

definiert sind.

Nach der zweiten Äquivalenz (19) für $\nu > 0$ haben wir:

$$Z_\nu = B A^{\nu-1} N, \qquad \text{für } \nu = 1, 2, 3, \ldots. \tag{23}$$

Nach der Definition des Ausdrucks $A^{-\nu}$ (DJ. [3], Formel (18)), Satz 4 (DJ. [3]) und auf Grund der ersten der Äquivalenzen (19) bekommen wir aus der Äquivalenz (22):

$$Z_{-\nu} \sim B A^{-\nu-1} \underline{C} | Z_0 \sim B | \underline{A}^{\nu+1} | \underline{C} | Z_0 \sim C \underline{A}^{\nu-1} \underline{B} | Z_0 \sim C \underline{A}^{\nu\ -1} M$$

und somit

$$Z_{-\nu} = C \underline{A}^{\nu-1} M, \qquad \text{für } \nu = 1, 2, 3, \ldots. \tag{24}$$

Auf dieselbe Weise ist

$$B A^{-1} \underline{C} | Z_0 \sim Z_0,$$

was bedeutet, daß auch Z_0 der Folge (22) angehört.

Nach diesen Betrachtungen können wir beweisen

Satz 2. *Wenn die Diophantische Gleichung*

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta x y + \gamma y^2 = \pm \delta, \quad \textit{wobei} \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \textit{ ganze Zahlen}, \\ (\alpha; \beta; \gamma) = 1, \\ D = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \\ \qquad \textit{kein Quadrat}, \end{cases} \tag{25}$$

eine Lösung $\frac{x_0}{y_0} = (Z_0)$ *besitzt, dann hat sie unendlich viele Lösungen, und zwar*

$$\frac{x_\nu}{y_\nu} = (Z_\nu), \quad \textit{für } \nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \tag{26}$$

wo

$$Z_\nu = B A^{\nu-1} N, \quad Z_{-\nu} = C \underline{A}^{\nu-1} M$$

ist. Dabei ist für jedes ganzzahlige ν:

$$f(Z_\nu) = (-1)^{m\nu} f(Z_0). \tag{27}$$

Beweis. Auf Grund der Gl. (13) und der Äquivalenz (22) bekommt man für jedes ganzzahlige ν:

$$\lambda f(Z_\nu) = [\underline{Z}_0 | C \underline{A}^{\nu-1} \underline{B} | B \underline{C} | B A^{\nu-1} \underline{C} | Z_0]$$

und dann

$$\lambda f(Z_\nu) = (-1)^n [\underline{Z}_0 | C \underline{A}^{\nu-1} | A^{\nu-1} \underline{C} | B \underline{C} | Z_0],$$

wo die Komplexe B und $\underline{B}$ „gekürzt" sind und die Substitution $\underline{C} | B \sim A$ zweimal durchgeführt. Wenn auch die Komplexe $C \underline{A}^{\nu-1}$ und $A^{\nu-1} \underline{C}$ „gekürzt" werden, wird man

$$\lambda f(Z_\nu) = (-1)^{\nu m} [\underline{Z}_0 | V | V | B \underline{C} | Z_0]$$

erhalten. Aus der letzten Gleichung schließlich folgt die Formel (27), weil

$$V | V | B \underline{C} \sim B \underline{C}, \quad [V | V | B \underline{C}] = - [B \underline{C}]$$

ist. Mit dem Beweis der Formel (27) ist auch der ganze Satz 2 bewiesen.

Sämtliche Lösungen Z_ν, *wo* $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ *ist, bilden ein Lösungssystem der Gl.* (25). Wie bekannt, kann die Diophantische Gleichung (25) mehrere solche Lösungssysteme besitzen.

8. Das Lösungssystem (26) der Gl. (25) kann — wie bekannt — auch aus einer algebraischen Formel erhalten werden, ohne Anwendung der Kettenbrüche, wenn eine Lösung dieses Systems bekannt ist. Hier werden wir einen neuen Beweis dieser algebraischen Formel geben, indem wir uns der Kettenbrüche bedienen. Um das zu erreichen, beweisen wir zuerst die Identität:

$$(28)\quad \begin{cases} [BA^{\nu-1}N] - [{}'BA^{\nu-1}N]\,(BA^k) \\ \qquad = \{[BA^{\nu-1}] - [{}'BA^{\nu-1}]\,(BA^k)\}\,\{[N] - [{}'N]\,(A^{k-\nu+1})\}, \end{cases}$$

wo ν eine ganze, während k eine natürliche Zahl ist ($\nu < k$). Wenn wir auf der linken Seite

$$[BA^{\nu-1}N] = [BA^{\nu-1}]\,[N] + [BA^{\nu-2}A']\,[{}'N],$$
$$[{}'BA^{\nu-1}N] = [{}'BA^{\nu-1}]\,[N] + [{}'BA^{\nu-2}A']\,[{}'N],$$

setzen, dann kann sie in der Gestalt

$$\{[BA^{\nu-1}] - [{}'BA^{\nu-1}]\,(BA^k)\}\,\{[N] - [{}'N]\,\Theta_{k,\nu}\}$$

ausgedrückt werden, wo

$$\Theta_{k,\nu} = \frac{[{}'BA^{\nu-2}A']\,(BA^k) - [BA^{\nu-2}A']}{[BA^{\nu-1}] - [{}'BA^{\nu-1}]\,(BA^k)}$$

ist. Wenn man noch $(BA^k) = \frac{[BA^k]}{[{}'BA^k]}$ setzt und die nötigen Reduktionen durchführt, dann wird durch die Anwendung der Formel (9) (Dj. [3]) $\Theta_{k,\nu}$ die Gestalt

$$\Theta_{k,\nu} = -\frac{[{}'\underline{A}\,\underline{A}^{\nu-2}\,\underline{B}\,|\,BA^k]}{[\underline{A}^{\nu-1}\,\underline{B}\,|\,BA^k]} = (A^{k-\nu+1})$$

erhalten, wodurch die Identität (28) bewiesen ist.

Wenn wir $k \to \infty$ gehenlassen und setzen

$$\xi = (B\bar{A}), \qquad z_\nu = [BA^{\nu-1}N] - [{}'BA^{\nu-1}N]\,\xi$$
$$u_\nu = [BA^{\nu-1}] - [{}'BA^{\nu-1}]\,\xi, \qquad \varepsilon = [A] - [{}'A]\,(\bar{A}),$$

dann erhält die Identität (28) folgende Gestalt:

$$(29)\qquad z_\nu = u_\nu\{[N] - [{}'N]\,(\bar{A})\}.$$

Für $N = A$ hat man

$$u_{\nu+1} = u_\nu\,\varepsilon,$$

woraus

$$(30)\qquad u_\nu = u_1\,\varepsilon^{\nu-1}$$

folgt. Da noch nach (29)

$$z_1 = u_1\{[N] - [{}'N]\,(\bar{A})\}$$

ist, folgt aus (29) und (30):

$$z_\nu = z_1 \varepsilon^{\nu-1}. \tag{31}$$

Aus dieser Formel haben wir $z_0 = z_1 \varepsilon^{-1}$, so daß sie in folgender Gestalt geschrieben werden kann

$$z_\nu = z_0 \varepsilon^\nu,$$

d.h.

$$x_\nu - y_\nu \xi = (x_0 - y_0 \xi)\{[A] - [{}'A](\bar{A})\}^\nu, \quad \text{für } \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \tag{32}$$

wo

$$\begin{matrix} x_\nu \\ y_\nu \end{matrix} = (Z_\nu)$$

ist. Es soll bemerkt werden, daß $\varepsilon = [A] - [{}'A](\bar{A})$ eine Einheit im Zahlkörper $\sqrt{D}$ ist, aber nicht immer die Grundeinheit. Zum Beispiel, wenn $A = 3$ ist, dann ist

$$\varepsilon = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Wenn aber $A = 1, 1, 1, 6, 1$ ist, dann ist

$$\varepsilon = 18 - 5\sqrt{13} = \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)^3.$$

9. Die Anwendung des Satzes 1 muß folgende zwei Fragen beantworten: 1. Feststellen, ob die gegebene ganze Zahl δ durch die quadratische Form (6) darstellbar ist. 2. Im Falle der bejahenden Antwort auf die erste Frage, sämtliche Paare teilerfremder ganzer Zahlen x und y bestimmen, für welche die quadratische Form (6) den Wert δ oder $-\delta$ hat.

Nehmen wir jetzt an — wenn die ganze Zahl δ gegeben ist — es bestehe ein Zahlenpaar ω_{-1} und ω'_{-1}, welches durch die Gln. (14) und (15) definiert ist, und es seien ihre ersten vollständigen Quotienten

$$\omega = (\underline{M}\bar{A}) = \frac{\sqrt{D} + p}{q}, \quad \omega' = (\underline{N}\bar{A}) = \frac{-\sqrt{D} + p}{q}. \tag{33}$$

Dann sind — nach (1) — D, p, q und δ durch die Relation

$$D - p^2 = q\delta \tag{34}$$

verbunden. Aus dieser folgt dann die Kongruenz

$$p^2 \equiv D \pmod{\delta}. \tag{35}$$

Die Existenz einer Wurzel der Kongruenz (35) stellt die notwendige und hinreichende Bedingung dar, damit δ der Nenner der Normalform einer quadratischen Irrationalzahl mit der Diskriminante D wird [mit $(q; p; \delta) = 1$]. Aber diese Zahl braucht nicht einer der Wurzeln der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$ äquivalent zu sein. Demnach ist die Existenz einer Wurzel der Kongruenz (35) *nur eine notwendige Bedingung*, damit δ durch die quadratische Form (6) darstellbar wird.

Setzen wir voraus, daß die Kongruenz (35) eine Wurzel p besitzt, dann folgt, aus der Relation (34), der entsprechende Wert des Nenners q, und danach die quadratischen Irrationalzahlen ω und ω'. Die Kettenbrüche der Zahlen ω und ω' geben endgültige Antwort auf die erste Frage, ob ω und ω' äquivalent mit ξ und η sind, oder nicht.

Zu gleicher Zeit erhält man die Antwort auch auf die zweite Frage, weil die Kettenbruchentwicklungen der Zahlen ω und ω' die Komplexe M und N liefern, und dann erhält man aus den Äquivalenzen (18) den Komplex Z_0, so daß die Formel (32) sämtliche Lösungen dieses Systems liefert.

10. Wenn p eine Wurzel der Kongruenz (35) ist, dann ist auch $\delta - p$ eine Wurzel, die Kongruenz (35) aber wird durch sämtliche Zahlen $p_k = p + k\delta$ und $\bar{p}_k = -p + k\delta$, wo $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ ist, befriedigt. Diesen Werten entsprechen, nach (34), die Nenner

$$q_k = \frac{D - p_k^2}{\delta}, \qquad \bar{q}_k = \frac{D - \bar{p}_k^2}{\delta}$$

und dann die quadratischen Irrationalzahlen

$$\omega_k = \frac{\sqrt{D} + p_k}{q_k}, \qquad \bar{\omega}_k = \frac{\sqrt{D} - \bar{p}_k}{\bar{q}_k}.$$

Aber da

$$\frac{1}{\omega_k} = -k + \frac{1}{\omega}, \qquad \frac{1}{\bar{\omega}_k} = -k - \frac{1}{\omega'}$$

ist, wo ω und ω' mit Hilfe von der Wurzel p gebildet und durch die Gln. (33) definiert sind, so ist

$$\omega_k = (-1, 1, k-2, {}^*\underline{M}\,\bar{A}), \qquad \bar{\omega}_k = (-1, 1, k-1, \underline{N}\,\bar{A}).$$

Die entsprechenden Komplexe M_k und N_k sind

$$M_k = M^*, k-2, 1, -1, \qquad N_k = N, k-1, 1, -1.$$

Aber da nach den Formeln (4) und (5)

$$[M_k] = -[M], \qquad [N_k] = -[N]$$

ist, so wird immer aus M_k und N_k die gleiche schon gefundene Lösung Z_0 erhalten.

Das bedeutet, daß es genügt, von jedem Paar der Wurzeln der Kongruenz (35) *die positive Wurzel zu nehmen, mit ihr die quadratische Irrationalzahl ω zu bilden und dann aus ihrer Kettenbruchentwicklung den Komplex M oder N abzulesen, je nachdem, ob ω mit ξ oder mit η äquivalent ist.*

11. Auf Grund von § 9 und § 10 kann der folgende Satz ausgesprochen werden:

Satz 3. *Die Anzahl der Lösungssysteme der Diophantischen Gleichung*

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \pm\delta, \quad \text{wobei} \begin{cases} (\alpha; \beta; \gamma) = 1, \\ D = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \\ \text{kein Quadrat}, \end{cases} \tag{36}$$

ist durch die Zahl der Wurzelpaare $p, -p$ der Kongruenz

$$p^2 \equiv D \pmod{\delta}$$

bestimmt, welche die Eigenschaft besitzen, daß die quadratische Irrationalzahl

$$\omega = \frac{\sqrt{D} + p}{q}, \quad \text{mit} \quad q = \left| \frac{D - p^2}{\delta} \right|, \tag{37}$$

einer der Wurzeln ξ oder η der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$ äquivalent ist.

Jedem solchem Paare $p, -p$ entspricht je ein Lösungsystem, wenn ξ und η nicht untereinander äquivalent sind, je zwei Systeme aber, wenn sie äquivalent sind.

Wenn die Kettenbruchentwicklungen der Zahlen ξ, η und ω

$$\xi = (B\bar{A}), \quad \eta = (C\underline{\bar{A}}), \quad \omega = (\underline{M}\bar{A})$$

lauten, wo B, C und $\underline{M}$ keine kürzesten Vorperioden zu sein brauchen, dann ist eine Lösung des entsprechenden Systems

$$\frac{x_0}{y_0} = (Z_0), \quad \text{wobei} \quad Z_0 \sim B \,|\, M. \tag{38}$$

Wenn dabei $A = SS_1$ ist, wo S und S_1 symmetrische geordnete Komplexe von natürlichen Zahlen sind, dann folgt aus dem Paar $p, -p$ auch das folgende zweite Lösungssystem

$$\frac{x_0^{(1)}}{y_0^{(1)}} = (Z_0^{(1)}), \quad \text{wobei} \quad Z_0^{(1)} \sim C \,|\, SM. \tag{39}$$

Schließlich, wenn keine der Wurzeln der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$ der Zahl ω äquivalent ist, dann bekommt man aus dem Paar $p, -p$ keine Lösung der Gl. (36).

Beweis. Der Satz 3 ist größtenteils schon früher bewiesen. Es bleibt nur der Fall zu betrachten, wenn einem Wurzelpaar $p, -p$ der Kongruenz (35) zwei Systeme von Lösungen der Gl. (36) entsprechen. Wenn $A = SS_1$ ist, können die Kettenbruchentwicklungen von ω und ω' in folgenden Gestalten

$$\omega = (\underline{M}\bar{A}) = (\underline{M}S\underline{\bar{A}}), \quad \omega' = (\underline{N}\underline{\bar{A}}) = (\underline{N}S_1\bar{A})$$

geschrieben werden, und dann bekommt man aus ihnen je zwei Komplexe M und N:

$$M \text{ und } M^{(1)} = S_1 N; \quad N \text{ und } N^{(1)} = SM.$$

Somit folgen aus den Äquivalenzen (18) die Äquivalenzen (38) und (39).

Im Falle, daß die Periode A die Gestalt $A = SS_1$ hat, kann keinesfalls gefolgert werden, daß den Wurzeln p und $-p$ der Kongruenz (35) einzeln je ein Lösungssystem der Gl. (36) entspricht, z.B. daß der Wurzel p die Lösung Z_0, und der Wurzel $-p$ die Lösung $Z_0^{(1)}$ entspricht. Denn, wenn ξ

und η untereinander nicht äquivalent sind, dann entspricht die Lösung Z_0 der Wurzel p mit gleichem Recht wie der Wurzel $-p$. (Siehe BACHMANN [1], S. 201.)

12. Beispiel 1: Wenn die Gleichung

$$f(x, y) \equiv 12x^2 - 22xy + 7y^2 = \pm 47$$

gegeben ist, dann sind die Wurzeln der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$:

$$\xi = \frac{\sqrt{37} + 11}{12} = (1, 2, \overline{2, 1, 3}), \quad \eta = \frac{-\sqrt{37} + 11}{12} = (0, 2, 2, \overline{3, 1, 2}),$$

und die Kongruenz

$$p^2 \equiv 37 \pmod{47}$$

hat ein einziges Wurzelpaar $p = \pm 15$, so daß $q = 4$ für $p = 15$ wird, und dann

$$\omega = \frac{\sqrt{37} + 15}{4} = (5, \overline{3, 1, 2}),$$

woraus $N = 5$, und

$$Z_0 \sim C \mid N \sim 0, 2, 2 \mid 5,$$

d.h. $Z_0 = 0, 1, 1, 2$, und schließlich

$$\frac{x_0}{y_0} = (0, 1, 1, 2) = \frac{3}{5}.$$

Tatsächlich haben wir $12 \cdot 3^2 - 22 \cdot 3 \cdot 5 + 7 \cdot 5^2 = -47$.

Beispiel 2: Wenn die Gleichung

$$f(x, y) \equiv 19x^2 - 56xy + 40y^2 = \pm 43$$

gegeben ist, dann sind die Wurzlen der Gleichung $f(\xi, 1) = 0$

$$\xi = \frac{\sqrt{24} + 28}{19} = (1, 1, 2, \overline{1, 2, 1, 1}), \quad \eta = \frac{-\sqrt{24} + 28}{19} = (1, 4, 1, \overline{1, 1, 2, 1})$$

und die Kongruenz

$$p^2 \equiv 24 \pmod{43}$$

hat ein einziges Wurzelpaar $p = \pm 14$. Aus $p = 14$ folgt $q = 4$ und dann

$$\omega = \frac{\sqrt{24} + 14}{4} = (4, \overline{1, 2, 1, 1}),$$

woraus $M = 4$, und aus den Äquivalenzen (38) und (39) folgen die Lösungen

$$Z_0 = 2, 1, \quad Z_0^{(1)} = 1, 1, 5$$

und schließlich

$$x_0 = 3, \; y_0 = 1; \quad x_0^{(1)} = 11, \; y_0^{(1)} = 6.$$

III. Besondere Fälle

Wir werden einige besondere Fälle betrachten.

13. Satz 4. *Die Diophantische Gleichung*

$$(40)\qquad f(x,y)\equiv \alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2=\pm 1,\quad \textit{wobei}\quad \begin{cases}(\alpha;2\beta;\gamma)=1,\ \alpha>0,\\ D=\beta^2-\alpha\gamma>0\\ \textit{kein Quadrat},\end{cases}$$

hat höchstens ein Lösungssystem, und zwar dann und nur dann, wenn die Wurzeln der Gleichung $f(\xi,1)=0$ *äquivalent mit* $\sqrt{D}$ *sind.*

Wenn

$$(41)\qquad \sqrt{D}=(b,\overline{S,2b}),\ \xi=(B,\overline{S,2b}),\quad \textit{wobei}\quad \begin{cases}B=b_1b_2\dots b_n,\\ b_n\gtrless 2b,\end{cases}$$

die Kettenbruchentwicklungen der Zahlen $\sqrt{D}$ *und* ξ *sind, dann ist eine Lösung der Gl.* (40):

$$\frac{x_0}{y_0}=(B'),$$

und dabei

$$(42)\qquad f(x_0,y_0)=(-1)^{n-1}\operatorname{sgn}(\xi-\eta).$$

Beweis. Für $\delta=1$ wird aus der Gl. (34) $q=D-p^2$ erhalten, wo p eine beliebige ganze Zahl ist, und dann folgt aus (37) und (41):

$$\omega=\frac{\sqrt{D}+p}{D-p^2}=(0,b-p,\overline{S,2b}),$$

woraus, auf Grund des Satzes 3, der erste Teil des Satzes 4 folgt. Aus der Kettenbruchentwicklung der Zahl ω lesen wir den Komplex $M=b-p,0$, und da die Kettenbruchentwicklung der zweiten Wurzel der Gleichung $f(\xi,1)=0$

$$\eta=(B'^*,2b-b_n-1,S,\overline{2b,S})$$

ist, folgen aus den Äquivalenzen (38) und (39) zwei Lösungen:

$$Z_0=B'^*,b-p-b_n-1,0;\qquad Z_0^{(1)}=B',b_n-p-b,0.$$

Jedoch reduzieren sich diese beiden Lösungen auf Grund der Formel (4) auf eine: $Z_0=B'$. Es bleibt noch die Formel (42) zu beweisen. Aus der Gl. (13), da $\lambda=[S]$ ist, folgt

$$f(x_0,y_0)=-\frac{1}{[S]}[{}'\underline{B}\,|\,B\,\underline{C}\,|\,B'],$$

woraus, auf Grund der Sätze 3 und 4 (DJ. [3]):

$$f(x_0,y_0)=\frac{(-1)^n}{[S]}\operatorname{sgn}(\xi-\eta)\cdot[V\,|\,b_nS]$$

erhalten wird. Daraus endlich bekommt man die Formel (42), weil $[V\,|\,b_nS]=-[S]$ ist.

14. Satz 5. *Die Diophantische Gleichung*

$$f(x,y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \pm 2, \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} (\alpha;\beta;\gamma) = 1, \ \alpha > 0 \\ D = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \\ \text{kein Quadrat,} \end{cases}$$

deren Diskriminante D eine gerade Zahl ist, hat höchstens ein Lössungsystem, und zwar dann und nur dann, wenn die Wurzeln der Gleichung $f(\xi,1)=0$, der Zahl $\frac{\sqrt{D}}{2}$ äquivalent sind.

Wenn

$$\frac{\sqrt{D}}{2} = (b, \overline{S, 2b}), \quad \xi = (B, \overline{S, 2b}), \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} B = b_1 b_2 \dots b_n, \\ b_n \gtrless 2b, \end{cases}$$

die Kettenbruchentwicklungen der Zahlen $\frac{\sqrt{D}}{2}$ und ξ sind, dann ist eine Lösung der betrachteten Gleichung

$$\frac{x_0}{y_0} = (B'),$$

und dabei

$$f(x_0, y_0) = (-1)^{n-1} \operatorname{sgn}(\xi - \eta) \cdot 2.$$

Der Beweis wie beim Satz 4.

15. Satz 6. *Die Diophantische Gleichung*

$$f(x,y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \pm 2, \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} (\alpha;\beta;\gamma) = 1, \ \alpha > 0, \\ D = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \\ \text{kein Quadrat,} \end{cases}$$

deren Diskriminante D eine ungerade Zahl ist, hat höchstens ein Lösungssystem, und zwar dann und nur dann wenn die Wurzeln der Gleichung $f(\xi,1)=0$ der Zahl $\frac{\sqrt{D}+1}{2}$ äquivalent sind.

Wenn

$$\frac{\sqrt{D}+1}{2} = (b, \overline{S, 2b-1}), \quad \xi = (B, \overline{S, 2b-1}), \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} B = b_1 b_2 \dots b_n, \\ b_n \gtrless 2b-1, \end{cases}$$

die Kettenbruchentwicklungen der Zahlen $\frac{\sqrt{D}+1}{2}$ und ξ sind, dann ist eine Lösung der betrachteten Gleichung

$$\frac{x_0}{y_0} = (B'),$$

und dabei

$$f(x_0, y_0) = (-1)^{n-1} \operatorname{sgn}(\xi - \eta) \cdot 2.$$

Beweis. Die Kongruenz (35) erhält in diesem Fall die Form

$$p^2 \equiv 2g + 1 \pmod 2,$$

wo g eine natürliche Zahl ist. Diese Kongruenz hat eine einzige Wurzel $p = 1$, und so wird aus der Gl. (34) $q = g$ erhalten, und dann

$$\omega = \frac{\sqrt{2g+1}+1}{g} = \left(0, b-1, \overline{S, 2b-1}\right).$$

Damit ist der erste Teil des Satzes 6 bewiesen, und der Beweis läuft weiter wie für den Satz 4.

Literatur

[1] Bachmann, P.: Die Elemente der Zahlentheorie. Leipzig: B. G. Teubner 1892. — [2] Djerasimović, B.: Beitrag zur Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche. Math. Z. **62**, 320—329 (1955). — [3] Djerasimovič, B.: Über die Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen. Math. Z. **66**, 228—239 (1956). — [4] Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Stuttgart: B. G. Teubner 1954.

Mathematisches Institut der Universität Belgrad (Jugoslawien)

(Eingegangen am 11. Juni 1956)

Baer, R.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 341—363 (1957)

Lokal Noethersche Gruppen

Von
Reinhold Baer

Wir werden eine Gruppe G Noethersch nennen, wenn jede Untergruppe von G endlich erzeugbar ist; und die Gruppe L soll *lokal*-Noethersch heißen, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe von L Noethersch ist. Man überzeugt sich sofort, daß Untergruppen und homomorphe Bilder lokal-Noetherscher Gruppen wieder lokal-Noethersch sind. Weiter ist jede abelsche Gruppe lokal-Noethersch. Während aber Erweiterungen Noetherscher Gruppen durch Noethersche Gruppen stets wieder Noethersche Gruppen sind, kann man eine entsprechende Aussage über lokal-Noethersche Gruppen gewiß nicht machen; denn man kann leicht Beispiele endlich erzeugbarer Gruppen angeben, die sogar Erweiterungen abelscher Gruppen durch zyklische Gruppen sind, ohne doch Noethersch zu sein. Es entsteht also die Frage, was für Bestandteile einer Gruppe lokal-Noethersch sein müssen, damit die ganze Gruppe lokal-Noethersch sei. In dieser Hinsicht werden wir das folgende recht umfassende Kriterium angeben: Ist die Gruppe G Produkt eines lokal-Noetherschen Normalteilers N und einer lokal-Noetherschen Untergruppe U, liegt weiter im Durchschnitt $N \cap U$ ein Normalteiler D mit lokal-Noetherscher Faktorgruppe G/D, so ist G selbst lokal-Noethersch. Hieraus folgt z. B., daß jedes Produkt lokal-Noetherscher Normalteiler wieder lokal-Noethersch ist. Weiter kann man folgendes Erweiterungskriterium herleiten: Ist N ein Normalteiler von G, ist $\{N, g\}$ lokal-Noethersch für jedes g in G, und ist schließlich jede endlich erzeugbare Untergruppe von G/N Noethersch und auflösbar, dann ist G lokal-Noethersch. Die G/N betreffende Voraussetzung läßt sich noch ein wenig abschwächen; aber es erscheint nicht wahrscheinlich, daß sich eine wirklich wesentliche Abschwächung erreichen läßt.

Es erscheint zweckmäßig, eine derartige Untersuchung gleich im Rahmen allgemeiner Betrachtungen über Eigenschaften von Gruppenklassen anzustellen, da viele der Ableitungen in allgemeineren Zusammenhängen gelten. Dies werden wir in § 1 und § 2 tun. § 3 ist dann der eigentlichen Betrachtung lokal-Noetherscher Gruppen gewidmet und im § 4 werden wir unsere Resultate auf lokale Eigenschaften anwenden.

1. Σ-Gruppen und Σ-Teiler

Unter Σ wollen wir eine gruppentheoretische Eigenschaft verstehen. Gruppen mit der Eigenschaft Σ wollen wir als Σ-Gruppen bezeichnen. Von jeder Gruppe soll feststehen, ob sie eine Σ-Gruppe ist oder nicht; und die Existenz von Σ-Gruppen werde auch stets vorausgesetzt. Darüber hinaus wollen wir verlangen, daß Σ den beiden folgenden Postulaten genügt.

I. *Untergruppen von Σ-Gruppen sind Σ-Gruppen.*

II. *Homomorphe Bilder von Σ-Gruppen sind Σ-Gruppen.*

Die Klasse der abelschen Gruppen etwa genügt den Forderungen I und II; die der freien Gruppen erfüllt I, aber nicht II; und die Klasse der einfachen Gruppen erfüllt II, ohne I zu erfüllen. Obwohl wir die Voraussetzungen I und II nicht immer benutzen werden, wird es doch bequemer sein, diese Voraussetzungen stets zu machen, ohne sie immer wiederholen zu müssen; und dies werden wir tun. Für eine systematische Diskussion der Eigenschaften gruppentheoretischer Eigenschaften sei neuerdings auch auf W. SPECHTs ausgezeichnete Gruppentheorie verwiesen.

Von einer solchen gruppentheoretischen Eigenschaft Σ kann man mancherlei Relationen ableiten, die wir als *gruppentheoretische Teilerbeziehungen* bezeichnen wollen. Wir werden hier drei wesentlich verschiedene derartige Teilerbeziehungen diskutieren. Jede von ihnen hat gewisse wichtige Eigenschaften, die die andern nicht haben; aber in den für uns wichtigen Anwendungen werden sich diese Begriffe decken.

Definition 1. *$N\Sigma^*G$, wenn N ein Normalteiler der Gruppe G ist, und wenn überdies eine jede N enthaltende Untergruppe S von G mit Σ-Faktorgruppe S/N stets eine Σ-Gruppe ist.*

Ist etwa Σ die Klasse der endlichen nilpotenten Gruppen, so ist $Z\Sigma^*G$, wenn Z das Zentrum der endlichen Gruppe G ist. — Weiter sieht man sofort, daß stets $1\Sigma^*G$ gilt; und schließlich folgt aus $N\Sigma^*G$, daß N eine Σ-Gruppe ist, da ja 1 eine Σ-Gruppe ist.

Satz 1. *Aus $N\Sigma^*G$ folgt, daß die Untergruppe S von G dann und nur dann eine Σ-Gruppe ist, wenn $S/(N\cap S)$ eine Σ-Gruppe ist.*

Beweis. Ist S eine Σ-Gruppe, so ist wegen II auch $S/(S\cap N)$ eine Σ-Gruppe. — Ist umgekehrt $S/(S\cap N)$ eine Σ-Gruppe, so ist wegen II auch die isomorphe Gruppe NS/N eine Σ-Gruppe. Aus $N\Sigma^*G$ folgt dann aber, daß NS eine Σ-Gruppe ist. Wegen I ist also auch S eine Σ-Gruppe.

Zusatz 1. *Aus $N\Sigma^*G$ folgt $(N\cap S)\Sigma^*S$ für jede Untergruppe S von G.*

Beweis. Ist nämlich T eine $N\cap S$ enthaltende Untergruppe von S, deren Faktorgruppe $T/(N\cap S)=T/(N\cap T)$ eine Σ-Gruppe ist, so folgt aus Satz 1, daß T eine Σ-Gruppe ist. Also ist $(N\cap S)\Sigma^*S$.

Satz 2. *Sind A und B Normalteiler der Gruppe G, $A\leqq B$, so ist dann und nur dann $B\Sigma^*G$, wenn $A\Sigma^*G$ und $B/A\Sigma^*G/A$ gelten.*

Beweis. Sei zunächst $B\Sigma^*G$. Ist S eine A enthaltende Untergruppe von G und S/A eine Σ-Gruppe, so ist $S/(S\cap B)$ wegen $A\leqq S\cap B$ als homomorphes Bild einer Σ-Gruppe selbst eine Σ-Gruppe. Aus Satz 1 folgern wir dann, daß S eine Σ-Gruppe ist; und damit ist $A\Sigma^*G$ gezeigt. — Ist weiter T/A eine B/A enthaltende Untergruppe von G/A, deren Faktorgruppe $(T/A)/(B/A)\simeq T/B$ eine Σ-Gruppe ist, so ist T eine Σ-Gruppe wegen $B\Sigma^*G$. Das homomorphe Bild T/A ist also auch eine Σ-Gruppe, so daß $B/A\Sigma^*G/A$ gilt.

Sei umgekehrt $A\Sigma^*G$ und $B/A\Sigma^*G/A$; und sei weiter S eine B enthaltende Untergruppe von G mit Σ-Faktorgruppe S/B. Dann ist S/A eine B/A enthaltende Untergruppe von G/A mit Σ-Faktorgruppe $(S/A)/(B/A) \simeq S/B$ und aus $B/A\Sigma^*G/A$ folgt dann, daß S/A eine Σ-Gruppe ist. Dann folgt aber aus $A\Sigma^*G$, daß S selbst eine Σ-Gruppe ist; und damit ist $B\Sigma^*G$ verifiziert.

Bemerkung 1. Ist etwa Σ die Klasse der abelschen Gruppen, so gilt $A\Sigma^*G$ für jeden abelschen direkten Faktor A von G. Sei insbesondere G die von den Elementen a, b, c, d erzeugte Gruppe, die folgenden Bedingungen genügen:

$$a^p = b^p = c^p = d^p = 1, \quad p \text{ eine ungerade Primzahl};$$

$$a^{-1}b^{-1}ab = c;$$

$$ac = ca, \; bc = cb, \; ad = da, \; bd = db.$$

Dann ist G das direkte Produkt seiner Untergruppen $\{a, b\}$ und $\{d\}$; $\{c\}$ ist die Kommutatorgruppe von G und $\{a, b\}$; und $\{c, d\}$ ist das Zentrum von G.

Da $\{d\}$ und $\{cd\}$ direkte Faktoren von G sind, so gilt $\{d\}\Sigma^*G$ und $\{cd\}\Sigma^*G$. Da $G/\{c, d\}$ abelsch ist, während weder G noch $G/\{d\}$ abelsch ist, so gilt weder $\{c, d\}\Sigma^*G$ noch $\{c, d\}/\{d\}\Sigma^*G/\{d\}$, trotzdem bei dem natürlichen Homomorphismus von G auf $G/\{d\}$ die Untergruppe $\{cd\}$ in $\{c, d\}/\{d\}$ übergeht. Dies Beispiel belegt also die folgenden Tatsachen:

Aus $A\Sigma^*G$ und $B\Sigma^*G$ folgt im allgemeinen nicht $AB\Sigma^*G$;

ist σ ein Homomorphismus der Gruppe G auf die Gruppe G^σ, so folgt aus $A\Sigma^*G$ im allgemeinen nicht $A^\sigma\Sigma^*G^\sigma$.

Definition 2. *$N\Sigma G$, wenn N ein Normalteiler der Gruppe G ist, und wenn für jede Σ-Untergruppe S von G auch NS eine Σ-Gruppe ist.*

Wieder gilt stets $1\Sigma G$; und wieder folgt aus $N\Sigma G$, daß N eine Σ-Gruppe ist.

Satz 3. *Aus $N\Sigma^*G$ folgt $N\Sigma G$; aus $N\Sigma G$ folgt $(N\cap S)\Sigma S$ für jede Untergruppe S von G; aus $N\Sigma G$ folgt $M\Sigma G$ für jeden in N enthaltenen Normalteiler M von G; aus $A\Sigma G$ und $B\Sigma G$ folgt $AB\Sigma G$.*

Beweis. Ist $N\Sigma^*G$ und S eine Σ-Untergruppe von G, so ist $NS/N \simeq S/(N\cap S)$ eine Σ-Gruppe als homomorphes Bild der Σ-Gruppe S. Also ist NS eine Σ-Gruppe, so daß aus $N\Sigma^*G$ auch $N\Sigma G$ folgt. Da Untergruppen von Σ-Gruppen ebenfalls Σ-Gruppen sind, so folgt aus $N\Sigma G$ auch $(N\cap S)\Sigma S$ für jede Untergruppe S von G und $M\Sigma G$ für jeden in N enthaltenen Normalteiler M von G. — Ist schließlich $A\Sigma G$ und $B\Sigma G$ und S eine Σ-Untergruppe von G, so ist BS eine Σ-Untergruppe von G und also auch $A(BS) = (AB)S$ eine Σ-Untergruppe von G, woraus dann $AB\Sigma G$ folgt.

Bemerkung 2. Es sei Σ die Klasse der endlichen zyklischen Gruppen, die natürlich den Bedingungen I und II genügt. Ist dann G das direkte Produkt der endlichen zyklischen Gruppe $Z \neq 1$ und der unendlichen zyklischen Gruppe V, so gilt $Z\Sigma G$, da Z ja alle endlichen zyklischen Untergruppen von G enthält. Dagegen gilt nicht $V^nZ/V^n\Sigma G/V^n$, wenn die positive Zahl durch genau dieselben Primzahlen teilbar ist wie die Ordnung von Z, da

dann G/V^n ein direktes Produkt zweier zyklischer Gruppen, aber nicht zyklisch ist. Aus diesem Beispiel folgt, daß aus $N\Sigma G$ nicht notwendig $N^\sigma\Sigma G^\sigma$ [σ ein Homomorphismus von G] folgt.

Bemerkung 3. Es sei Σ die Klasse der abelschen Gruppen. Die Untergruppe U der Gruppe G erfüllt dann und nur dann $U\Sigma G$, wenn U im Zentrum von G enthalten ist, da ja zyklische Gruppen abelsch sind und aus $U\Sigma G$ auch die Kommutativität von $\{U, g\}$ folgen muß.

In Bemerkung 1 haben wir ein Beispiel einer Gruppe G konstruiert, deren Zentrum Z nicht $Z\Sigma^*G$ erfüllt. Also folgt aus $N\Sigma G$ im allgemeinen nicht $N\Sigma^*G$. — Ist weiter Z das Zentrum der Gruppe G und N/Z das Zentrum der Gruppe G/Z, so folgt aus den eben gemachten Bemerkungen, daß $Z\Sigma G$ und $N/Z\Sigma G/Z$ gelten, daß aber $N\Sigma G$ nur gelten kann, wenn $N=Z$ ist. Damit haben wir gezeigt, daß aus $M\Sigma G$ und $N/M\Sigma G/M$ im allgemeinen nicht $N\Sigma G$ folgt.

Die dritte gruppentheoretische Teilerbeziehung, die wir von Σ ableiten wollen, hängt auch noch von einer positiven Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ ab.

Definition 3. *$N\Sigma_\mathfrak{n}G$, wenn N ein Normalteiler von G ist, und wenn eine jede Untergruppe S von G, die aus N durch Adjunktion von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen entsteht, eine Σ-Gruppe ist.*

Es ist klar, daß aus $N\Sigma_\mathfrak{n}G$ stets folgt, daß N eine Σ-Gruppe ist, und daß dann und nur dann $N\Sigma_1G$ gilt, wenn N ein Σ-Normalteiler von G ist. Man wird im allgemeinen wenig Zusammenhänge zwischen dieser Teilerbeziehung und den vorher eingeführten erwarten können. Sind aber etwa zyklische Gruppen Σ-Gruppen, so folgt aus $N\Sigma G$ sofort $N\Sigma_2G$.

Satz 4. *Aus $N\Sigma_\mathfrak{n}G$ folgt $N^\sigma\Sigma_\mathfrak{n}G^\sigma$ für jeden Homomorphismus σ von G und $M\Sigma_\mathfrak{n}G$ für jeden in N enthaltenen Normalteiler M von G.*

Beweis. Ist nämlich S eine N^σ enthaltende Untergruppe von G^σ, die durch Adjunktion von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen aus N^σ entsteht, so existiert eine N enthaltende Untergruppe T von G, die aus N durch Adjunktion von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen entsteht, und die durch σ auf S abgebildet wird $S=T^\sigma$. Aus $N\Sigma_\mathfrak{n}G$ folgt aber, daß T eine Σ-Gruppe ist. Also ist das homomorphe Bild S von T eine Σ-Gruppe, so daß auch $N^\sigma\Sigma_\mathfrak{n}G^\sigma$ gilt. — Die zweite Behauptung folgt sofort daraus, daß Untergruppen von Σ-Gruppen ebenfalls Σ-Gruppen sind.

Hat die Gruppe G die Eigenschaft, daß eine jede von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen erzeugte Untergruppe von G eine Σ-Gruppe ist, so folgt aus $N\Sigma G$ natürlich auch $N\Sigma_\mathfrak{n}G$; und ähnliche Situationen werden uns besonders interessieren. Um Schlüsse in der umgekehrten Richtung ausführen zu können, müssen wir ein Erweiterungspostulat einführen.

E.$\mathfrak{n}$. *Ist N ein Normalteiler der Gruppe G, ist G/N eine Σ-Gruppe und ist weiter jede Untergruppe S von G, die aus N durch Adjunktion von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen entsteht, eine Σ-Gruppe, so ist G selbst eine Σ-Gruppe.*

Wegen I und II sind die in E.$\mathfrak{n}$ auftretenden Bedingungen notwendig dafür, daß G eine Σ-Gruppe ist.

Solch ein Erweiterungspostulat E.π wird von mancherlei gruppentheoretischen Eigenschaften Σ erfüllt. Die Klasse der endlichen auflösbaren Gruppen erfüllt E.1, da ja jede Erweiterung einer endlichen auflösbaren Gruppe durch eine endliche auflösbare Gruppe wieder eine endliche auflösbare Gruppe ist; E.2 wird von der Klasse der endlichen nilpotenten Gruppen erfüllt und E.3 von der Klasse der endlichen überauflösbaren Gruppen.

Satz 5. *Genügt Σ dem Erweiterungspostulat* E.π, *ist jede von weniger als π Elementen erzeugte Untergruppe von G eine Σ-Gruppe, so sind die folgenden Eigenschaften des Normalteilers N von G miteinander äquivalent:*

$$N\Sigma^*G,\ N\Sigma G,\ N\Sigma_\pi G.$$

Beweis. Klar.

Bemerkung 4. Sind die drei Beziehungen $X\Sigma^*Y$, $X\Sigma Y$ und $X\Sigma_\pi Y$ für geeignetes positives π äquivalent, so folgt aus den Sätzen 2, 3, 4, daß diese gruppentheoretische Teilerbeziehung Σ folgende Eigenschaften hat:

Aus $N\Sigma G$ folgt $(N\cap S)\Sigma S$ für jede Untergruppe S von G;

aus $N\Sigma G$ folgt $N^\sigma\Sigma G^\sigma$ für jeden Homomorphismus σ von G;

ist M ein in N enthaltener Normalteiler von G, so ist dann und nur dann $N\Sigma G$, wenn $M\Sigma G$ und $N/M\Sigma G/M$ gelten;

aus $X\Sigma G$ und $Y\Sigma G$ folgt $XY\Sigma G$.

Die nicht leere Menge Θ von Untergruppen der Gruppe G werde als *Untergruppenturm* bezeichnet, wenn für irgend zwei verschiedene Untergruppen X und Y in Θ stets $X<Y$ oder $Y<X$ gilt. Es ist leicht einzusehen, daß die Vereinigungsmenge der Untergruppen in Θ ebenfalls eine Untergruppe von G ist. Besteht insbesondere Θ nur aus Normalteilern von G, so ist die Vereinigungsmenge von Θ ebenfalls ein Normalteiler von G usw. Wir werden häufig von dem folgenden Turmpostulat T Gebrauch machen:

T. *Vereinigungsmengen von Σ-Gruppentürmen sind Σ-Gruppen.*

Man überzeugt sich leicht, daß die Klasse der zyklischen Gruppen nicht dem Turmpostulat genügt, während T z.B. von der Klasse der abelschen Gruppen erfüllt wird.

Satz 6. *Das Turmpostulat* T *ist mit folgender Eigenschaft von Σ äquivalent.*

E. *Die Gruppe G ist [dann und nur dann] eine Σ-Gruppe, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe von G eine Σ-Gruppe ist.*

Der einfache Beweis dieses im wesentlichen wohlbekannten Satzes sei der Bequemlichkeit des Lesers wegen angedeutet.

Beweis. Ist zunächst G die Vereinigungsmenge des Turmes Θ von Σ-Untergruppen von G, so ist jede endliche Teilmenge von G in einer Untergruppe aus Θ enthalten; und es folgt aus I, daß jede endlich erzeugbare Untergruppe von G eine Σ-Gruppe ist. Also folgt T aus E.

Sei umgekehrt das Turmpostulat T von Σ erfüllt. Ist dann G eine Gruppe, deren sämtliche endlich erzeugbare Untergruppen Σ-Gruppen sind, so bemerken wir zunächst, daß jede abzählbar unendliche Untergruppe U von G sich als Vereinigungsmenge eines Turmes endlich erzeugbarer Untergruppen darstellen

läßt, also Vereinigungsmenge eines Turmes von $\mathfrak{Z}$-Untergruppen ist, woraus folgt, daß U selbst eine $\mathfrak{Z}$-Untergruppe ist. Da weiter jede überabzählbare Untergruppe U von G sich als Vereinigungsmenge eines Untergruppenturms Λ derart darstellen läßt, daß jede Untergruppe in Λ geringere Mächtigkeit als U hat, so folgt nun durch eine naheliegende transfinite Induktion bezüglich der Mächtigkeit der Untergruppen von G, daß jede Untergruppe von G, und also auch G selbst, eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist, q.e.d.

Satz 7. *Genügt $\mathfrak{Z}$ dem Turmpostulat* T, *und ist $H = H(G, \mathfrak{Z})$ das Produkt aller $X\mathfrak{Z}G$ erfüllenden Normalteiler von G, so gilt $H\mathfrak{Z}G$.*

Beweis. Es sei S eine $\mathfrak{Z}$-Untergruppe von G und U eine endlich erzeugbare Untergruppe von HS. Dann gibt es endlich erzeugbare Untergruppen V von H und W von S derart, daß $U \leqq \{V, W\}$ ist. Erinnern wir uns weiter daran, daß H das Produkt aller $X\mathfrak{Z}G$ erfüllenden Normalteiler X von G ist, so folgt aus $V \leqq H$ und der endlichen Erzeugbarkeit von V die Existenz endlich vieler $X_i\mathfrak{Z}G$ erfüllender Normalteiler X_i von G derart, daß $V \leqq X_1 \dots X_n$ gilt. Aus Satz 3 folgt durch eine naheliegende Induktion die Gültigkeit von $X_1 \dots X_n\mathfrak{Z}G$. Da W als Untergruppe der $\mathfrak{Z}$-Gruppe S selbst eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist, so ist $X_1 \dots X_nW$ eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe, deren Untergruppen U und $\{V, W\}$ wegen Postulat I ebenfalls $\mathfrak{Z}$-Gruppen sind. Damit ist gezeigt, daß jede endlich erzeugbare Untergruppe von HS eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist; und es ergibt sich aus Satz 6 und dem Turmpostulat T, daß HS eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist. Folglich gilt $H\mathfrak{Z}G$, q.e.d.

Zusatz 2. *Erfüllt $\mathfrak{Z}$ das Turmpostulat* T, *sind $X\mathfrak{Z}Y$ und $X\mathfrak{Z}^*Y$ äquivalente Beziehungen, so ist die Gruppe G dann und nur dann eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild H von G einen von 1 verschiedenen, $N\mathfrak{Z}H$ erfüllenden Normalteiler N besitzt.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß die Notwendigkeit unserer Bedingung daraus folgt, daß homomorphe Bilder von $\mathfrak{Z}$-Gruppen selbst $\mathfrak{Z}$-Gruppen sind, und daß eine Gruppe L dann und nur dann eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist, wenn $L\mathfrak{Z}L$ gilt.

Es erfülle umgekehrt die Gruppe G die in unserem Zusatz 2 angegebene Bedingung. Dann bilden wir das Produkt H aller $X\mathfrak{Z}G$ erfüllenden Normalteiler X von G. Aus Satz 7 folgt wegen T, daß $H\mathfrak{Z}G$ gilt; und hieraus folgt weiter, daß H eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist. Wäre nun $H \neq G$, so bilden wir das homomorphe Bild $G/H \neq 1$ von G — man bemerke, daß H eine charakteristische Untergruppe von G ist. Nach Voraussetzung existiert dann ein Normalteiler $N/H \neq 1$ von G/H, der der Bedingung $N/H\mathfrak{Z}G/H$ genügt. Da die Beziehungen $X\mathfrak{Z}Y$ und $X\mathfrak{Z}^*Y$ nach Voraussetzung äquivalent sind, so gelten auch $H\mathfrak{Z}^*G$ und $N/H\mathfrak{Z}^*G/H$. Aus Satz 2 folgt dann $N\mathfrak{Z}^*G$; und hieraus folgt $N\mathfrak{Z}G$. Aber dann erhalten wir den offenbaren Widerspruch $N \leqq H < N$. Folglich ist $G = H$ eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe, q.e.d.

Bemerkung 5. Die Beweise von Satz 7 und Zusatz 2 zeigen, daß man das Turmpostulat T auch durch die Forderung ersetzen kann, daß die Maximalbedingung von den Normalteilern der betrachteten Gruppe G erfüllt werde.

2. Produkte von Σ-Gruppen

Wie im § 1 nehmen wir an, daß die gruppentheoretische Eigenschaft Σ den Postulaten I und II genügt. Wir wollen Kriterien dafür herleiten, daß ein Produkt von Normalteilern mit der Eigenschaft Σ selbst eine Σ-Gruppe ist. Zu diesem Zweck führen wir das folgende Postulat P.$\mathfrak{n}$ ein, wo $\mathfrak{n}$, wie immer, eine $1<\mathfrak{n}$ erfüllende Kardinalzahl ist.

P.$\mathfrak{n}$. *Ist $G=AB$ Produkt seiner Normalteiler A und B, sind A und B Gruppen mit der Eigenschaft Σ, und wird sowohl $A/(A\cap B)$ wie auch $B/(A\cap B)$ von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen erzeugt, so ist G eine Σ-Gruppe.*

Man bemerke, daß P.1 weiter nichts besagt, als daß das Produkt zweier gleicher Σ-Normalteiler selbst eine Σ-Gruppe ist, daß also P.1 trivial ist.

Satz 1. *Wird* E.$\mathfrak{n}$ *von Σ erfüllt, so ist das Produkt irgend zweier Normalteiler mit der Eigenschaft Σ dann und nur dann eine Σ-Gruppe, wenn* P.$\mathfrak{n}$ *von Σ erfüllt wird.*

Beweis. Es ist klar, daß P.$\mathfrak{n}$ eine notwendige Bedingung ist. Wir nehmen also sofort an, daß P.$\mathfrak{n}$ von Σ erfüllt wird, daß $G=AB$ das Produkt seiner Normalteiler A und B ist, und daß sowohl A wie auch B die Eigenschaft Σ hat. Sei weiter S eine Untergruppe von B, die von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen erzeugt wird. Dann ist S auch eine Untergruppe des Normalteilers $T=B\cap AS$ von AS; und es wird

$$AS/T=AS/(B\cap AS)\simeq ABS/B=AB/B\simeq A/(A\cap B),$$

so daß AS/T als homomorphes Bild der Σ-Gruppe A selbst eine Σ-Gruppe ist. Sei weiter R eine T enthaltende Untergruppe von AS derart, daß R/T von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen erzeugt wird. Wir bedenken, daß $S\leqq T\leqq AS$ und also $AS=AT$ ist. Weiter ist $T\leqq R\leqq AS=AT$; und es folgt aus DEDEKINDS Gesetz, daß

$$R=T(A\cap R)$$

ist. Es ist klar, daß T und $A\cap R$ Normalteiler von R sind. Da T in der Σ-Gruppe B und $A\cap R$ in der Σ-Gruppe A enthalten ist, so sind B und $A\cap R$ beides Σ-Gruppen. Weiter ist

$$T\cap(A\cap R)=T\cap A=B\cap AS\cap A=A\cap B.$$

Schließlich ist

$$T/[T\cap(A\cap R)]=T/(T\cap A)\simeq AT/A=AS/A\simeq S/(A\cap S)$$

und

$$(A\cap R)/[T\cap(A\cap R)]\simeq T(A\cap R)/T=R/T,$$

so daß also sowohl $T/[T\cap(A\cap R)]$ wie auch $(A\cap R)/[T\cap(A\cap R)]$ von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen erzeugt wird. Wir können also P.$\mathfrak{n}$ anwenden; und es ergibt sich, daß R eine Σ-Gruppe ist. Damit haben wir gezeigt, daß erstens AS/T eine Σ-Gruppe ist, und daß zweitens jede zwischen T und AS gelegene Gruppe

R, die aus T durch Adjunktion von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen entsteht, eine Σ-Gruppe ist. Wir können also E.$\mathfrak{n}$ anwenden; und es folgt, daß AS eine Σ-Gruppe ist.

Damit haben wir aber auch gezeigt, daß jede aus A durch Adjunktion von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen entstehende Untergruppe von G eine Σ-Gruppe ist, da ja eine jede derartige Untergruppe sich als Produkt AS von A mit einer von weniger als $\mathfrak{n}$ Elementen erzeugbaren Untergruppe S von G darstellen läßt. Weiter ist $G/A = AB/A \simeq B/(A \cap B)$ als homomorphes Bild der Σ-Gruppe B selbst eine Σ-Gruppe. Wir können also wieder E.$\mathfrak{n}$ anwenden; und es ergibt sich, daß G eine Σ-Gruppe ist, q.e.d.

Bemerkung 1. Die Unentbehrlichkeit von E.$\mathfrak{n}$ folgt etwa daraus, daß P.1, wie schon bemerkt, stets erfüllt ist, während natürlich Produkte von Normalteilern mit der Eigenschaft Σ im allgemeinen keine Σ-Gruppen sind.

Bemerkung 2. Um die Unentbehrlichkeit von P.$\mathfrak{n}$ einzusehen, betrachten wir die Klasse Σ der zyklischen Gruppen. Diese genügt, wie man leicht einsieht, der Forderung E.2, aber nicht der Forderung P.2, da ja direkte Produkte zyklischer Gruppen im allgemeinen nicht zyklisch sind.

Die folgende Forderung P stellt nichts anderes als die Konjunktion aller Forderungen P.$\mathfrak{n}$ dar.

P. *Produkte zweier Normalteiler mit der Eigenschaft Σ haben ebenfalls die Eigenschaft Σ.*

Satz 1 besagt, daß P eine Folge von E.$\mathfrak{n}$ und P.$\mathfrak{n}$ zusammen ist.

Folgerung. *Genügt Σ der Forderung* P, *sind weiter A und B Normalteiler der Gruppe G mit Σ-Faktorgruppen G/A und G/B, so ist auch $G/(A \cap B)$ eine Σ-Gruppe.*

Beweis. Das direkte Produkt D von G/A und G/B ist wegen P eine Σ-Gruppe. Bilden wir das Element g in G auf das Element (Ag, Bg) in D ab, so erhalten wir einen Isomorphismus von $G/(A \cap B)$ auf eine Untergruppe von D. Als Untergruppe einer Σ-Gruppe ist also $G/(A \cap B)$ ebenfalls eine Σ-Gruppe.

Bemerkung 3. Ist G eine beliebige Gruppe, so können wir den Durchschnitt $D = D(G, \Sigma)$ aller Normalteiler N mit Σ-Faktorgruppe G/N bilden. Es ist klar, daß D eine charakteristische Untergruppe ist; doch läßt sich im allgemeinen nicht zeigen, daß G/D eine Σ-Gruppe ist. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Klasse der Gruppen endlicher Klasse. Die folgende Betrachtung zeigt, daß G/D nur in Ausnahmefällen eine Σ-Gruppe sein wird. Sei nämlich Σ irgendeine gruppentheoretische Eigenschaft, die abgesehen von I und II noch folgenden Forderungen genügt:

(a) Jede Gruppe endlicher Klasse ist eine Σ-Gruppe;

(b) $G/D(G, \Sigma)$ ist für jede Gruppe G eine Σ-Gruppe.

Ist nun F eine [nicht abelsche] freie Gruppe, so ist nach einem bekannten Satz von MAGNUS 1 der Durchschnitt der Glieder der absteigenden Zentren-

kette. Aus (a) folgt also, daß $D(F, \Sigma) = 1$ ist; und es folgt aus (b), daß F eine Σ-Gruppe ist. Da aber jede Gruppe homomorphes Bild einer freien Gruppe ist, so ergibt sich sogar, daß jede Gruppe eine Σ-Gruppe ist, wenn nur (a) und (b) von Σ erfüllt werden.

Um den auf H. WIELANDT zurückgehenden Begriff der Nachinvarianz in einer für unsere Anwendungen bequemen Form zu formulieren, müssen wir zunächst an den Begriff der [verallgemeinerten aufsteigenden] *Normalketten einer Gruppe* G erinnern. Darunter sei eine nicht leere Menge $\mathfrak{K}$ von Untergruppen der Gruppe G verstanden, die folgenden Bedingungen genügt:

(K.1) *Ist* $X \neq G$ *eine Untergruppe in* $\mathfrak{K}$, *so ist* X *echter Normalteiler einer Untergruppe* Y *aus* $\mathfrak{K}$.

(K.2) *Ist der Untergruppenturm* $\mathfrak{T} \leq \mathfrak{K}$, *so gehört die Vereinigungsmenge von* $\mathfrak{T}$ *zu* $\mathfrak{K}$.

Man beachte, daß die Vereinigungsmengen von Untergruppentürmen stets wieder Untergruppen sind. — Man kann zeigen, daß jede Normalkette von G eine wohlgeordnete [aufsteigende] Normalkette enthält; und wir werden weiter unten beweisen, daß G Glied einer jeden Normalkette von G ist.

Definition. *Die Untergruppe* N *von* G *ist eine nachinvariante Untergruppe von* G, *wenn es eine* N *enthaltende Normalkette von* G *gibt.*

Man überzeugt sich sofort davon, daß G selbst eine nachinvariante Untergruppe von G ist, daß jeder Normalteiler einer nachinvarianten Untergruppe von G eine nachinvariante Untergruppe von G ist, und daß nachinvariante Untergruppen nachinvarianter Untergruppen nachinvariante Untergruppen sind [Transitivität der Nachinvarianz].

WIELANDT hat nur die Glieder endlicher Normalketten als nachinvariante Untergruppen bezeichnet; und es ist klar, daß sich der WIELANDTsche Begriff der Nachinvarianz gewiß dann mit dem unseren deckt, wenn die Maximalbedingung von den nachinvarianten Untergruppen der betrachteten Gruppe erfüllt wird.

Es sei schließlich noch erwähnt, daß der Normalisator einer nachinvarianten Untergruppe von G nicht einmal dann eine nachinvariante Untergruppe zu sein braucht, wenn G endlich ist.

Satz 2. *Genügt* Σ *den Postulaten* P *und* T, *so ist das Kompositum aller nachinvarianten* Σ*-Untergruppen von* G *eine charakteristische* Σ*-Untergruppe von* G.

Beweis. Ist U eine Untergruppe von G, so werde mit U^* das Produkt aller der Normalteiler von U bezeichnet, die die Eigenschaft Σ haben. Haben die endlich vielen Normalteiler $X_1, \ldots, X_k$ von U je die Eigenschaft Σ, so folgt aus P, daß ihr Produkt $X_1 \ldots X_k$ ebenfalls die Eigenschaft Σ hat. Also ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von U^* eine Σ-Gruppe; und es folgt aus dem Turmpostulat T und § 1, Satz 6, daß U^* eine charakteristische Σ-Untergruppe von U ist.

Sei nun N eine nachinvariante Σ-Untergruppe von G. Dann existiert eine N enthaltende Normalkette $\mathfrak{N}$ von G. Wir verstehen unter Θ die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathfrak{T}$ ist ein N enthaltender Turm.

(2) Gehören X und Y zu $\mathfrak{T}$, so folgt aus $X \leqq Y$ stets $X^* \leqq Y^*$.

Es ist klar, daß N allein einen solchen Turm bildet, und daß also die Menge Θ nicht leer ist. Ist weiter Λ eine nicht leere Teilmenge von Θ mit der Turmeigenschaft, so daß also für zwei verschiedene Türme $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ in Λ stets $\mathfrak{T}' < \mathfrak{T}''$ oder $\mathfrak{T}'' < \mathfrak{T}'$ gilt, dann ist die Vereinigungsmenge aller Türme aus Λ offenbar wieder ein Turm in Θ. Damit ist aber gezeigt, daß das Maximumprinzip der Mengenlehre auf die Menge Θ von Türmen angewandt werden kann; und es gibt also einen maximalen Turm $\mathfrak{M}$ in Θ.

Die Vereinigungsmenge V der Untergruppen in dem Turm $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{N}$ gehört wegen (K.2) zu $\mathfrak{N}$. Aus (2) folgt, daß die Untergruppen X^* für X in $\mathfrak{M}$ einen Turm von Σ-Untergruppen bilden, dessen Vereinigungsmenge W wegen des Turmpostulats eine Σ-Untergruppe von G ist. Da N wegen (1) zu $\mathfrak{M}$ gehört, und da N eine Σ-Gruppe ist, so ist $N = N^* \leqq W$.

Ist X eine Untergruppe in $\mathfrak{M}$ und v ein Element in V, so existiert eine v enthaltende Untergruppe Y in $\mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{M}$ wegen (1) ein Turm ist, so gilt $X \leqq Y$ oder $Y \leqq X$; und es gibt also eine $\{X, v\}$ enthaltende Untergruppe R in $\mathfrak{M}$. Wegen (2) ist $X^* \leqq R^*$; und da R^* eine charakteristische Untergruppe der v enthaltenden Gruppe R ist, so wird

$$v^{-1} X^* v \leqq v^{-1} R^* v = R^*.$$

Da aber W die Vereinigungsmenge aller X^* mit X in $\mathfrak{M}$ ist, so folgt, daß W ein Normalteiler von V ist. Da der Normalteiler W von V die Eigenschaft Σ hat, so gilt $W \leqq V^*$; und damit ist $X^* \leqq V^*$ für jedes X aus $\mathfrak{M}$ erwiesen. Durch Hinzufügen von V zu $\mathfrak{M}$ entsteht also wieder ein Turm aus Θ; und aus der Maximalität des Turmes $\mathfrak{M}$ in Θ folgt dann, daß V zu $\mathfrak{M}$ gehört.

Wäre $V \neq G$, so wäre die Untergruppe V aus $\mathfrak{N}$ wegen (K.1) echter Normalteiler einer Untergruppe H aus $\mathfrak{N}$. Da V^* eine charakteristische Untergruppe des Normalteilers V von H ist, so ist die Σ-Gruppe V^* ein Normalteiler von H. Also wird $V^* \leqq H^*$. Da V die Vereinigung aller Untergruppen des Turms $\mathfrak{M}$ ist, so entsteht aus $\mathfrak{M}$ durch Hinzufügen von H wieder ein Turm aus Θ; und aus der Maximalität von $\mathfrak{M}$ folgt, daß H zu $\mathfrak{M}$ gehört. Dann wird aber $H \leqq V < H$, ein Widerspruch. Folglich ist $V = G$ in $\mathfrak{M}$ enthalten; und es folgt aus (1) und (2), daß $N = N^* \leqq G^*$ gilt. Damit haben wir aber gezeigt, daß die charakteristische Σ-Untergruppe G^* von G alle nachinvarianten Σ-Untergruppen von G enthält, q.e.d.

3. Produkte lokal-NOETHERscher Gruppen

Wir wollen eine Gruppe NOETHER*sch* nennen, wenn alle ihre Untergruppen endlich erzeugbar sind. Eine Gruppe G ist also dann und nur dann NOETHERsch wenn die Maximalbedingung von ihren Untergruppen erfüllt wird [Ober-

gruppensatz]. Untergruppen und homomorphe Bilder NOETHERscher Gruppen sind NOETHERsch; und ebenso sind Erweiterungen NOETHERscher Gruppen durch NOETHERsche Gruppen NOETHERsch.

Die Gruppe G heiße *lokal*-NOETHER*sch*, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe von G NOETHERsch ist. Es ist klar, daß Untergruppen lokal-NOETHERscher Gruppen lokal-NOETHERsch sind, und daß die Klasse der lokal-NOETHERschen Gruppen dem Turmpostulat T des § 1 genügt. Ist E eine endlich erzeugbare Untergruppe des homomorphen Bildes H der lokal-NOETHERschen Gruppe G, so ist E ein homomorphes Bild einer endlich erzeugbaren Untergruppe F von G. Da aber F NOETHERsch ist, so ist auch E NOETHERsch, d.h. homomorphe Bilder lokal-NOETHERscher Gruppen sind lokal NOETHERsch. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß abelsche Gruppen lokal-NOETHERsch sind.

Dagegen sind Erweiterungen lokal-NOETHERscher Gruppen durch lokal-NOETHERsche Gruppen im allgemeinen nicht wieder lokal-NOETHERsch. Dies zeigt das folgende wohlbekannte und einfache

Beispiel 1. Es sei F eine [nicht abelsche] freie Gruppe mit zwei Erzeugenden, $G = F/F''$. Dann ist $G' = F'/F''$ eine freie abelsche Gruppe unendlichen Ranges, G/G' eine freie abelsche Gruppe des Ranges 2; und G wird von zwei Elementen erzeugt. Da abelsche Gruppen lokal-NOETHERsch sind, so ist G eine endlich erzeugbare Erweiterung einer [abelschen] lokal-NOETHERschen Gruppe durch eine [abelsche] NOETHERsche Gruppe, ist aber selbst weder NOETHERsch noch lokal-NOETHERsch.

Satz 1. *Die Gruppe G ist lokal*-NOETHER*sch, wenn sie Normalteiler N, D und eine Untergruppe U mit folgenden Eigenschaften besitzt:*

N, U und G/D sind lokal-NOETHER*sch;*
$D \leq N \cap U$ und $G = NU$.

Beweis. Es sei P eine endlich erzeugbare Untergruppe von G. Da jedes Element in P Produkt eines Elements in N und eines Elements in U ist, so existieren endlich erzeugbare Untergruppen $N^* \leq N$ und $U^* \leq U$ derart, daß $P \leq \{N^*, U^*\} = Q$ ist. Dann ist DQ/D eine endlich erzeugbare Untergruppe der lokal-NOETHERschen Gruppe G/D, so daß also DQ/D NOETHERsch ist. Daraus folgt die endliche Erzeugbarkeit des Normalteilers

$$(DQ/D) \cap (N/D) = (DQ \cap N)/D = D(Q \cap N)/D \simeq (Q \cap N)/(Q \cap D)$$

von DQ/D; und es existiert also eine endlich erzeugbare Untergruppe R von $Q \cap N$ derart, daß

$$Q \cap N = (Q \cap D)R, \quad DQ \cap N = DR$$

gilt. Da N^* eine endlich erzeugbare Untergruppe von $Q \cap N \leq DR$ ist, so existiert eine endlich erzeugbare Untergruppe Y von D derart, daß $N^* \leq \{Y, R\}$ ist; und folglich ist

$$P \leq \{N^*, U^*\} \leq \{Y, R, U^*\}.$$

Sei jetzt E ein endliches Erzeugendensystem von U^*. Ist e irgendein Element in E, so ist

$$DR = D(e^{-1}Re) = D(eRe^{-1}),$$

da ja D ein Normalteiler von G und $DR = DQ \cap N$ ein Normalteiler der U^* und E enthaltenden Untergruppe DQ ist. Da R endlich erzeugbar ist, so existiert eine endlich erzeugbare Untergruppe $R(e)$ von D derart, daß

$$\{e^{-1}Re, R, eRe^{-1}\} \leq \{R(e), R\}$$

ist. Da E eine endliche Menge ist, so ist das Kompositum $R(E)$ aller $R(e)$ mit e in E eine endlich erzeugbare Untergruppe von D.

Da D ein Normalteiler von G ist, so ist $T = D \cap \{Y, R(E), U^*\}$ ein Y und $R(E)$ enthaltender Normalteiler von $\{Y, R(E), U^*\} \leq U$. Da $Y, R(E), U^*$ endlich erzeugbar sind, so ist $\{Y, R(E), U^*\}$ als endlich erzeugbare Untergruppe der nach Voraussetzung lokal-NOETHERschen Gruppe U selbst NOETHERsch; und daraus folgt insbesondere die endliche Erzeugbarkeit von T. Da T eine endlich erzeugbare Untergruppe von D und R eine endlich erzeugbare Untergruppe von N ist, so ist $\{T, R\}$ als endlich erzeugbare Untergruppe der nach Voraussetzung lokal-NOETHERschen Gruppe N selbst NOETHERsch.

Da T ein Normalteiler von $\{Y, R(E), U^*\}$ ist, so gehört insbesondere jedes Element e aus dem Erzeugendensystem E von U^* dem Normalisator von T an; und wir haben

$$e^{-1}Te = T = eTe^{-1} \quad \text{für jedes } e \text{ in } E.$$

Weiter ist

$$\{e^{-1}Re, R, eRe^{-1}\} \leq \{R(e), R\} \leq \{R(E), R\} \leq \{T, R\} \quad \text{für jedes } e \text{ in } E.$$

Folglich wird für jedes e in E

$$e^{-1}\{T, R\}e \leq \{T, R\} \quad \text{und} \quad e\{T, R\}e^{-1} \leq \{T, R\};$$

und hieraus folgt

$$e^{-1}\{T, R\}e = \{T, R\} \quad \text{für jedes } e \text{ in } E.$$

Da aber E ein Erzeugendensystem von U^* ist, so folgt, daß U^* dem Normalisator von $\{T, R\}$ angehört, so daß also die NOETHERsche Gruppe $\{T, R\}$ ein Normalteiler von $\{T, R, U^*\}$ ist. Da U^* als endlich erzeugbare Untergruppe der lokal-NOETHERschen Gruppe U selbst NOETHERsch ist, und da

$$\{T, R, U^*\}/\{T, R\}$$

ein homomorphes Bild der NOETHERschen Gruppe U^* ist, so ist $\{T, R, U^*\}$ als Erweiterung der NOETHERschen Gruppe $\{T, R\}$ durch die NOETHERsche Gruppe $\{T, R, U^*\}/\{T, R\}$ ebenfalls eine NOETHERsche Gruppe. Aus

$$P \leq \{Y, R, U^*\} \leq \{T, R, U^*\}$$

folgt schließlich, daß P als Untergruppe der Noetherschen Gruppe $\{T, R, U^*\}$ gleichfalls eine Noethersche Gruppe ist; und damit haben wir gezeigt, daß G lokal-Noethersch ist, q.e.d.

Folgerung 1. *Das Kompositum aller lokal-Noetherschen nachinvarianten Untergruppen ist eine lokal-Noethersche charakteristische Untergruppe.*

Beweis. Es sei zunächst $G = AB$ das Produkt seiner lokal-Noetherschen Normalteiler A und B. Dann ist $G/(A \cap B)$ das direkte Produkt der lokal-Noetherschen Gruppen $A/(A \cap B)$ und $B/(A \cap B)$. Da jedes direkte Produkt zweier Noetherscher Gruppen wieder eine Noethersche Gruppe ist, und da jede endlich erzeugbare Untergruppe von $G/(A \cap B)$ in dem direkten Produkt einer endlich erzeugbaren Untergruppe von $A/(A \cap B)$ und einer endlich erzeugbaren Untergruppe von $B/(A \cap B)$ enthalten ist, so ist $G/(A \cap B)$ sicherlich lokal-Noethersch. Anwendung von Satz 1 ergibt, daß $G = AB$ ebenfalls lokal-Noethersch ist. Folglich wird Postulat P des § 2 von der Klasse der lokal-Noetherschen Gruppen erfüllt. Da Postulat T des § 1 ebenfalls von der Klasse der lokal-Noetherschen Gruppen erfüllt wird, so können wir § 2, Satz 2 anwenden. Also ist das Kompositum aller lokal-Noetherschen nachinvarianten Untergruppen von G eine lokal-Noethersche charakteristische Untergruppe von G.

Der wichtigste Spezialfall von Folgerung 1 ist natürlich die Aussage, daß jedes Produkt lokal-Noetherscher Normalteiler ein lokal-Noetherscher Normalteiler ist.

Satz 2. *Erweiterungen lokal-Noetherscher Gruppen durch endliche Gruppen sind lokal-Noethersch.*

Beweis. Ist N ein lokal-Noetherscher Normalteiler der Gruppe G und G/N endlich, so ist nämlich $U \cap N$ endlich erzeugbar, wenn U eine endlich erzeugbare Untergruppe von G ist, da ja $U/(U \cap N) \simeq NU/N$ als Untergruppe von G/N endlich ist, s. etwa Baer [*1*; p. 396, (1.3)]. Erweiterungen Noetherscher Gruppen durch endliche Gruppen sind aber Noethersch; und folglich ist U als endliche Erweiterung der Noetherschen Gruppe $U \cap N$ selbst Noethersch, woraus dann folgt, daß G lokal-Noethersch ist, q.e.d.

Wir haben schon darauf hingewiesen, daß die Klasse der lokal-Noetherschen Gruppen nicht die Eigenschaft (E.1) hat. Die folgenden Betrachtungen sollen zeigen, daß wir nicht darauf hoffen können, die Gültigkeit von (E.2) zu erweisen.

Die folgenden drei Eigenschaften sind miteinander äquivalent:

(a) *Die Klasse der lokal-Noetherschen Torsionsgruppen genügt der Forderung* (E.1).

(b) *Die Klasse der lokal-Noetherschen Torsionsgruppen genügt der Forderung* (E.2).

(c) *Noethersche Torsionsgruppen sind endlich.*

Man bemerke, daß (c) eine Variante der berühmten Burnsideschen Vermutung ist.

Beweis. Es ist klar, daß (b) aus (a) folgt. Gilt (b), so betrachten wir eine NOETHERsche Torsionsgruppe G. Sei p irgendeine Primzahl und A eine $A^p=1$ erfüllende abelsche Gruppe, deren Rang genau gleich der Mächtigkeit von G ist. Es gibt dann eine ein-ein-deutige Abbildung $t(g)$ von G auf eine Basis $t(G)$ von A. Zu jedem Element g aus G gibt es genau einen Automorphismus von A, der $t(x)$ für jedes x in G auf $t(xg)$ abbildet; und wir können diesen Automorphismus von A mit g bezeichnen, da wir auf diese Weise eine isomorphe Darstellung von G als Automorphismengruppe von A erhalten. Weiter existiert eine Erweiterung E von A durch G, die G als Untergruppe enthält und in A genau die eben konstruierten Automorphismen induziert — dies ist eine geeignete Untergruppe des Holomorphs von A. Die Gruppe E wird offenbar von $t(1)$ und G erzeugt; und da G als NOETHERsche Gruppe endlich erzeugbar ist, so ist auch E endlich erzeugbar. Da G und A Torsionsgruppen sind, so ist auch E eine Torsionsgruppe. Ist e irgendein Element in E, so sieht man mühelos ein, daß jede endlich erzeugbare Untergruppe von $\{A, e\}$ sogar endlich ist. Schließlich ist $E/A \simeq G$ und also NOETHERsch. Anwendung von (E.2) ergibt, daß E lokal-NOETHERsch ist. Da aber E endlich erzeugbar ist, so ist E sogar NOETHERsch; und daraus folgt insbesondere, daß A eine endlich erzeugbare abelsche Torsionsgruppe und also endlich ist. Folglich ist insbesondere die Basis $t(G)$ von A endlich, die nach Konstruktion die gleiche Mächtigkeit wie G hat. Also ist G selbst endlich; und wir haben (c) aus (b) hergeleitet.

Schließlich gelte (c); und es sei H eine Erweiterung der lokal-NOETHERschen Torsionsgruppe N durch die lokal-NOETHERsche Torsionsgruppe H/N. Ist dann U eine endlich erzeugbare Untergruppe von H, so ist NU/N eine endlich erzeugbare Untergruppe von H/N; und als solche ist NU/N eine NOETHERsche Torsionsgruppe. Wegen (c) ist also NU/N endlich. Da N eine lokal-NOETHERsche Torsionsgruppe ist, so folgt aus Satz 2, daß auch NU eine lokal-NOETHERsche Gruppe ist. Die endlich erzeugbare Untergruppe U von NU/N ist also NOETHERsch; und damit ist gezeigt, daß H lokal-NOETHERsch ist, d.h. daß (a) aus (c) folgt, q.e.d.

Definition. *Die Gruppe G ist fast-auflösbar, wenn jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G einen Normalteiler $N \neq 1$ mit endlicher Kommutatorgruppe N' besitzt.*

Im folgenden werden wir uns mit NOETHERschen fast-auflösbaren Gruppen befassen, deren charakteristische Eigenschaften wir in dem folgenden Satz 3 zusammenstellen. Für weitere Eigenschaften dieser Gruppenklasse sei auf BAER [4; p. 276] verwiesen.

Satz 3. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind miteinander äquivalent:*

(1) *G ist* NOETHERsch *und fast-auflösbar.*

(2) *G ist eine endliche Erweiterung einer* NOETHERschen *auflösbaren Gruppe.*

(3) *G ist endlich erzeugbar und jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G besitzt einen Normalteiler $N \neq 1$, der endlich oder endlich erzeugbar und abelsch ist.*

(4) *G ist endlich erzeugbar; jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G besitzt eine nachinvariante Untergruppe $N \neq 1$, die endlich oder zyklisch ist; ist der lokal-*NOETHER*sche Normalteiler L von G in der nachinvarianten Untergruppe K von G enthalten, und ist K/L eine unendliche zyklische Gruppe, so ist K lokal-*NOETHER*sch.*

Beweis. Aus BAER [*2*; p. 149, Satz 1] folgert man ohne Mühe, daß eine NOETHERsche und fast-auflösbare Gruppe G eine charakteristische Untergruppe N mit folgenden zwei Eigenschaften besitzt:

(2*) G/N ist endlich und $N^{(k)} = 1$ für geeignetes k.

[Hierbei sind die Ableitungen wie üblich induktiv durch die Gleichungen $G = G^{(0)}$, $G^{(i-1)} =$ Kommutatorgruppe von $G^{(i)}$ definiert.] Damit ist die Äquivalenz von (1) und (2) dargetan. — Die Äquivalenz von (1) und (3) haben wir an anderer Stelle bewiesen; s. BAER [*4*; p. 276/277, Zusatz 4].

Es ist klar, daß (4) aus den äquivalenten Eigenschaften (1) bis (3) folgt. Wir nehmen also die Gültigkeit von (4) an. Aus Folgerung 1 ergibt sich zunächst, daß das Kompositum L aller lokal-NOETHERschen nachinvarianten Untergruppen von G eine lokal-NOETHERsche charakteristische Untergruppe von G ist. Wäre $L \neq G$, so besäße das homomorphe Bild $G/L \neq 1$ von G eine nachinvariante Untergruppe $K/L \neq 1$, die endlich oder zyklisch ist. Da $L < K$ und K eine nachinvariante Untergruppe von G ist, und da L das Kompositum aller nachinvarianten lokal-NOETHERschen Untergruppen von G ist, so ist K nicht lokal-NOETHERsch. Erweiterungen lokal-NOETHERscher Gruppen durch endliche Gruppen sind nach Satz 2 lokal-NOETHERsch. Also ist K/L eine unendlich zyklische Gruppe. Dann ist aber K nach der dritten Bedingung von (4) lokal-NOETHERsch; und aus diesem Widerspruch folgt, daß $G = L$ lokal-NOETHERsch ist. Da aber G nach der [hier zum erstenmal benutzten] ersten Bedingung von (4) endlich erzeugbar ist, so ist G sogar NOETHERsch.

Sei nun $B \neq 1$ ein homomorphes Bild von G. Dann ist B insbesondere NOETHERsch. Nachinvariante Untergruppen lassen sich also mit B durch endliche geordnete Normalketten verbinden, so daß sich der hier von uns benutzte Begriff der Nachinvarianz mit dem engeren von WIELANDT eingeführten und von uns in BAER [*3*] benutzten Begriff der Nachinvarianz deckt. Besitzt B eine zyklische, von 1 verschiedene, nachinvariante Untergruppe, so ist die Menge R aller zyklische nachinvariante Untergruppen von B erzeugenden Elemente ebenfalls von 1 verschieden. Nach BAER [*3*; p. 418, Satz 2] ist R eine charakteristische Untergruppe von B. Da B mit G NOETHERsch ist, so ist R endlich erzeugbar, so daß R sogar von endlicher Klasse ist [d.h. eine endliche Zentrenkette besitzt]; s. BAER [*3*; p. 418, Satz 3]. Also ist insbesondere das Zentrum von R eine von 1 verschiedene, endlich erzeugbare, charakteristische, abelsche Untergruppe von B. — Besitzt B keine von 1 verschiedene, zyklische nachinvariante Untergruppe, so folgern wir aus der Bedingung (4) die Existenz einer von 1 verschiedenen, endlichen, nachinvarianten Untergruppe von B; und unter diesen gibt es eine maximale M, da ja B mit G NOETHERsch ist. Die nachinvariante Untergruppe M

von B ist in einer Normalkette $\mathfrak{N}$ von B enthalten. Einige Untergruppen in $\mathfrak{N}$ enthalten M als Normalteiler, z.B. M selbst; und unter diesen Gliedern von $\mathfrak{N}$ gibt es ein maximales N. Wäre $N \neq B$, so wäre N echter Normalteiler eines Gliedes J von $\mathfrak{N}$. Aus $N < J$ folgt dann, daß M kein Normalteiler von J ist. Da aber M ein Normalteiler von N und N ein Normalteiler von J ist, so ist $x^{-1}Mx$ für jedes x in J ein Normalteiler von N, so daß also $Mx^{-1}Mx$ für jedes x in J ein endlicher Normalteiler von N ist. Es ist dann klar, daß $Mx^{-1}Mx$ für jedes x in J eine endliche nachinvariante Untergruppe von B ist. Aus der Maximalität von M folgt also $M = x^{-1}Mx$ für jedes x in J, so daß M ein Normalteiler von J ist. Dies ist ein Widerspruch. Also ist M ein Normalteiler von $N = B$. Damit haben wir gezeigt, daß (3) aus (4) folgt, womit die Äquivalenz der Eigenschaften (1) bis (4) erwiesen ist.

Folgerung 2. *Die Klasse der* NOETHERschen *fast-auflösbaren Gruppen genügt den Postulaten* I, II, E.1 *und* P.

Dies ist eine fast unmittelbare Folge aus Satz 3.

Satz 4. *Die Gruppe G ist lokal-*NOETHERsch, *wenn sie einen lokal-*NOETHERschen *Normalteiler N mit folgenden Eigenschaften besitzt:*

(a) *Ist U eine N enthaltende Untergruppe von G mit unendlicher zyklischer Faktorgruppe U/N, so ist U lokal-*NOETHERsch.

(b) *Jede endlich erzeugbare Untergruppe von G/N ist* NOETHERsch *und fast-auflösbar.*

Bemerkung. Bedingung (a) ist automatisch erfüllt, wenn G/N eine Torsionsgruppe ist; und aus (b) folgt insbesondere, daß G/N lokal-NOETHERsch ist.

Beweis. Es sei S eine endlich erzeugbare Untergruppe von G. Dann ist $S/(S \cap N) \simeq NS/N$ eine endlich erzeugbare Untergruppe von G/N; und es folgt aus (b), daß $S/(S \cap N)$ NOETHERsch und fast-auflösbar ist. Das Kompositum K aller lokal-NOETHERschen nachinvarianten Untergruppen von S ist nach Folgerung 1 eine lokal-NOETHERsche charakteristische Untergruppe von S. Da N nach Voraussetzung lokal-NOETHERsch ist, so ist $N \cap S$ ein lokal-NOETHERscher Normalteiler von S, der natürlich in K enthalten ist. Also ist S/K ein homomorphes Bild der NOETHERschen und fast-auflösbaren Gruppe $S/(S \cap N)$.

Wäre $K \neq S$, so existierte eine nachinvariante Untergruppe $H/K \neq 1$ von S/K, die endlich oder zyklisch ist. Aus $K < H$ und der Nachinvarianz von H folgt dann, daß H nicht lokal-NOETHERsch sein kann, da ja K das Kompositum aller lokal-NOETHERschen nachinvarianten Untergruppen von S ist. Da Erweiterungen lokal-NOETHERscher Gruppen durch endliche Gruppen wieder lokal-NOETHERsch sind [Satz 2], so ist H/K unendlich und also eine unendliche zyklische Gruppe. Es existiert folglich eine unendliche zyklische Gruppe W derart, daß $H = KW$ und $1 = K \cap W$ ist. Dann ist aber auch NW/N eine unendlich zyklische Gruppe; und es folgt aus Bedingung (a), daß NW lokal-NOETHERsch ist. Die Untergruppe $(N \cap S)W$ von NW ist also auch

lokal-NOETHERsch. Da

$K, (N \cap S)W$ und $H/(N \cap S)$ lokal-NOETHERsch sind und

$N \cap S \leq K \cap (N \cap S)W$, $H = K(N \cap S)W$ ist,

[die Untergruppe $H/(N \cap S)$ von $S/(N \cap S)$ ist sogar NOETHERsch], so ergibt sich aus Satz 1, daß H lokal-NOETHERsch ist. Aus diesem Widerspruch folgt aber, daß $K = S$ eine endlich erzeugbare und lokal-NOETHERsche Gruppe ist. Also ist jede endlich erzeugbare Untergruppe S von G NOETHERsch, d.h. G ist lokal-NOETHERsch.

Bemerkung. Es sei an das einfache Beispiel einer zyklischen Erweiterung einer abelschen Gruppe erinnert, die nicht lokal-NOETHERsch ist: G werde von Elementen a und b erzeugt, die den folgenden Bedingungen genügen: $b(a^{-i}ba^i) = (a^{-i}ba^i)b$. Die von den Elementen $a^{-i}ba^i$ erzeugte Untergruppe A von G ist dann ein abelscher Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe G/A; und A ist sogar eine freie abelsche Gruppe unendlichen Ranges. Diese endlich erzeugbare Gruppe G ist also nicht NOETHERsch und erst recht nicht lokal-NOETHERsch. Dies zeigt die Unentbehrlichkeit der in Satz 3 und 4 auftretenden Bedingung, daß gewisse unendliche zyklische Erweiterungen von lokal-NOETHERschen Gruppen wieder lokal-NOETHERsch sind.

Ist G eine beliebige Gruppe, so sei unter $T(G)$ das Produkt aller Normalteiler X von G verstanden, die folgender Bedingung genügen:

(T) *Jede X enthaltende Untergruppe U von G mit zyklischer Faktorgruppe U/X ist lokal-*NOETHERsch.

Es folgt aus Satz 2, daß (T) mit folgender Bedingung äquivalent ist:

(T′) X ist lokal-NOETHERsch und jede X enthaltende Untergruppe U von G mit unendlicher zyklischer Faktorgruppe U/X ist lokal-NOETHERsch.

Weiter folgt sofort aus Folgerung 1, daß *das Produkt $T(G)$ aller T-Teiler von G* lokal-NOETHERsch ist.

Satz 5. *Ist jede* NOETHERsche *Untergruppe eines jeden homomorphen Bildes von G fast-auflösbar, so ist jede $T(G)$ enthaltende Untergruppe U von G mit lokal-*NOETHERscher *Faktorgruppe $U/T(G)$ lokal-*NOETHERsch *und*

$$T[G/T(G)] = 1.$$

Beweis. Hat der Normalteiler X von G die Eigenschaft (T), und ist U eine X enthaltende Untergruppe von G mit lokal-NOETHERscher Faktorgruppe U/X, so ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von U/X NOETHERsch und fast-auflösbar; und es folgt aus Satz 4, daß U lokal-NOETHERsch ist. Damit ist gezeigt, daß der Normalteiler X von G dann und nur dann die Eigenschaft (T) hat, wenn er folgender Bedingung genügt:

(T*) *Jede X enthaltende Untergruppe U von G mit lokal-*NOETHERscher *Faktorgruppe U/X ist lokal-*NOETHERsch.

Hat weiter der Normalteiler X von G die äquivalenten Eigenschaften (T) und (T*), und ist S eine lokal-NOETHERsche Untergruppe von G, so ist $XS/X \simeq S/(S \cap X)$ lokal-NOETHERsch; und aus (T*) folgt, daß XS lokal-

NOETHERsch ist. Also sind die Eigenschaften (T) und (T*) auch mit folgender Eigenschaft von X äquivalent:

(T**) *Ist L eine lokal-*NOETHERsche *Untergruppe von G, so ist XL lokal-*NOETHERsch.

$T(G)$ ist also das Produkt aller Normalteiler X von G mit der Eigenschaft (T**). Aus § 1, Satz 7 und dem Turmpostulat T, das ja von der Eigenschaft, lokal-NOETHERsch zu sein, erfüllt wird, ergibt sich dann, daß $T(G)$ ebenfalls die Eigenschaft (T**) hat, die aber mit (T*) äquivalent ist. Damit ist unsere erste Behauptung bewiesen.

Es sei nun W die eindeutig bestimmte Untergruppe von G, die $T(G)$ enthält und der Gleichung $W/T(G) = T[G/T(G)]$ genügt. Dann ist W ein Normalteiler von G. Ist U eine W enthaltende Untergruppe von G mit lokal-NOETHERscher Faktorgruppe U/W, so ist $U/T(G)$ eine $T[G/T(G)]$ enthaltende Untergruppe von $G/T(G)$ mit lokal-NOETHERscher Faktorgruppe

$$[U/T(G)]/T[G/T(G)] \simeq U/W.$$

Da aber $G/T(G)$ ebenfalls der Voraussetzung von Satz 5 genügt, so können wir das erste Resultat von Satz 5 auf $G/T(G)$ anwenden; und es ergibt sich, daß $U/T(G)$ lokal-NOETHERsch ist. Eine zweite Anwendung des ersten Resultats von Satz 5 ergibt dann, daß U selbst lokal-NOETHERsch ist. Also hat W die zu (T) äquivalente Eigenschaft (T*), so daß $W \leqq T(G) \leqq W$ gilt. Mithin ist $W = T(G)$ und $T[G/T(G)] = W/T(G) = 1$.

Folgerung 3. *Sind* NOETHERsche *homomorphe Bilder von Untergruppen der Gruppe G fast-auflösbar, so ist G dann und nur dann lokal-*NOETHERsch, *wenn jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ einer endlich erzeugbaren Untergruppe von G einen T-Teiler $N \neq 1$ besitzt.*

Dies ergibt sich sofort aus Satz 5.

Unter einem *L-Teiler der Gruppe G* sei ein Normalteiler X von G mit folgender Eigenschaft verstanden:

(L) *Ist U eine X enthaltende Untergruppe von G mit* NOETHERscher *und fast-auflösbarer Faktorgruppe U/X, so ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von U* NOETHERsch *und fast-auflösbar.*

Es ist klar, daß jeder L-Teiler auch ein T-Teiler ist, und daß jede endlich erzeugbare Untergruppe eines L-Teilers NOETHERsch und fast-auflösbar ist; vgl. BAER [*4*; Satz 5 und seinen Beweis].

Folgerung 4. *Das Produkt $L(G)$ aller L-Teiler von G ist ein L-Teiler von G; und 1 ist der einzige L-Teiler von $G/L(G)$.*

Beweis. Es sei $N/L(G)$ ein L-Teiler von $G/L(G)$ und U eine N enthaltende Untergruppe von G mit NOETHERscher und fast-auflösbarer Faktorgruppe U/N. Dann ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von $U/L(G)$ NOETHERsch und fast-auflösbar; und aus Folgerung 1 erschließt man, daß jede endlich erzeugbare Untergruppe von $L(G)$ NOETHERsch und fast-auflösbar ist, da ja $L(G)$ ein Produkt von Normalteilern mit dieser Eigenschaft ist. Es folgt, daß

jede NOETHERsche Untergruppe eines homomorphen Bildes von U fast-auflösbar ist. Nach Definition ist $L(G)$ Produkt von L-Teilern von G. Da L-Teiler von G auch T-Teiler sind, und da jeder in U enthaltene T-Teiler von G ein T-Teiler von U ist, so ist $L(G)$ ein Produkt gewisser T-Teiler von U. Also ist $L(G) \leqq T(U)$; und aus Satz 5 folgt, daß U lokal-NOETHERsch ist. Dann sind aber alle endlich erzeugbaren Untergruppen von U NOETHERsch und fast-auflösbar, so daß N ein L-Teiler von G ist. Es folgt, daß $L(G) = N$ ein L-Teiler von G und 1 der einzige L-Teiler von $G/L(G)$ ist, q.e.d.

4. Vererbung gruppentheoretischer Eigenschaften

Wir werden in diesem Abschnitt eine gruppentheoretische Eigenschaft Σ betrachten, die jedenfalls den folgenden Postulaten genügen soll:

I. *Untergruppen von Σ-Gruppen sind Σ-Gruppen.*

II. *Homomorphe Bilder von Σ-Gruppen sind Σ-Gruppen.*

III. *Jede Σ-Gruppe ist* NOETHERsch.

Die von Σ abgeleitete Eigenschaft $L(\Sigma)$ wird dann folgendermaßen definiert:

G ist dann und nur dann eine $L(\Sigma)$-Gruppe, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe von G eine Σ-Gruppe ist.

Wegen I ist jede Σ-Gruppe auch eine $L(\Sigma)$-Gruppe. Aus der Definition folgt sofort, daß jede Untergruppe einer $L(\Sigma)$-Gruppe wieder eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist; und aus II folgert man mühelos, daß homomorphe Bilder von $L(\Sigma)$-Gruppen ebenfalls $L(\Sigma)$-Gruppen sind. Aus § 1, Satz 6 ergibt sich, daß $L(\Sigma)$ die kleinste Σ umfassende, die Postulate I, II und das Turmpostulat T erfüllende Gruppenklasse ist. Wegen III sind schließlich alle $L(\Sigma)$-Gruppen lokal-NOETHERsch.

Satz 1. *Dann und nur dann ist jedes Produkt von $L(\Sigma)$-Normalteilern eine $L(\Sigma)$-Gruppe, wenn jedes Produkt zweier Σ-Normalteiler eine Σ-Gruppe ist.*

Beweis. Ist zunächst jedes Produkt von $L(\Sigma)$-Normalteilern eine $L(\Sigma)$-Gruppe, so ist insbesondere jedes Produkt $G = AB$ zweier Σ-Normalteiler A und B eine $L(\Sigma)$-Gruppe, da ja Σ-Gruppen auch $L(\Sigma)$-Gruppen sind. Da Σ-Gruppen NOETHERsch sind, so sind A, B und also auch $G = AB$ endlich erzeugbar. Da endlich erzeugbare $L(\Sigma)$-Gruppen sogar Σ-Gruppen sind, so ist G eine Σ-Gruppe, womit die Notwendigkeit unserer Bedingung dargetan ist.

Wir nehmen umgekehrt an, daß Produkte zweier Σ-Normalteiler wieder Σ-Gruppen sind. Sei nun $G = AB$ das Produkt seiner beiden $L(\Sigma)$-Normalteiler A und B. Da A und B beide lokal-NOETHERsch sind, so folgt aus § 3, Folgerung 1, daß G lokal-NOETHERsch ist. Ist U eine endlich erzeugbare Untergruppe von $G = AB$, so existieren natürlich auch endliche Teilmengen $E \leqq A$ und $F \leqq B$ derart, daß $U \leqq \{E, F\} = V$ ist. Als endlich erzeugbare Untergruppe der lokal-NOETHERschen Gruppe G ist aber V NOETHERsch. Da A und B Normalteiler von G sind, und da $E \leqq A \cap V$, $F \leqq B \cap V$ ist, so ist V Produkt seiner Normalteiler $A \cap V$ und $B \cap V$. Als Untergruppe der

NOETHERschen Gruppe V ist aber $A \cap V$ endlich erzeugbar; und als endlich erzeugbare Untergruppe der $L(\Sigma)$-Gruppe A ist $A \cap V$ eine Σ-Gruppe. Ebenso folgt, daß $B \cap V$ eine Σ-Gruppe ist. Das Produkt $V = (A \cap V)(B \cap V)$ zweier Σ-Normalteiler ist nach Voraussetzung eine Σ-Gruppe; und die Untergruppe U der Σ-Gruppe V ist wegen I eine Σ-Gruppe. Also ist G eine $L(\Sigma)$-Gruppe. Damit ist gezeigt, daß $L(\Sigma)$ dem Postulat P des § 2 genügt. Da aber $L(\Sigma)$ auch dem Turmpostulat T des § 1 genügt, so ergibt sich aus § 2, Satz 2, daß jedes Produkt von $L(\Sigma)$-Normalteilern eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist.

Folgerung 1. *Ist das Produkt zweier Σ-Normalteiler stets wieder eine Σ-Gruppe, so ist das Kompositum aller nachinvarianten $L(\Sigma)$-Untergruppen der Gruppe G eine charakteristische $L(\Sigma)$-Untergruppe von G.*

Dies folgt sofort aus Satz 1 und § 2, Satz 2.

Um auch die Resultate der zweiten Hälfte des § 3 anwenden zu können, werde der Eigenschaft Σ noch eine weitere Bedingung auferlegt.

IV. *Jede Σ-Gruppe ist fast-auflösbar.*

Von jetzt ab werde also gefordert, daß Σ den Bedingungen I bis IV genüge.

Satz 2. *Ist $1 < n$, so genügt Σ dann und nur dann dem Erweiterungspostulat* E.n, *wenn* E.n *von $L(\Sigma)$ erfüllt wird.*

Beweis. Genüge zunächst $L(\Sigma)$ dem Erweiterungspostulat E.n. Weiter sei N ein Normalteiler der Gruppe G; und es habe sowohl G/N wie auch jede aus N durch Adjunktion von weniger als n Elementen entstehende Untergruppe von G die Eigenschaft Σ. Da jede Σ-Gruppe auch eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist, so folgt aus E.n, daß G selbst eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist. Da N und G/N als Σ-Gruppen endlich erzeugbar sind [III], so ist G eine endlich erzeugbare $L(\Sigma)$-Gruppe und also eine Σ-Gruppe; und E.n wird also auch von Σ erfüllt.

Wir nehmen umgekehrt an, daß Σ der Forderung E.n genügt; und wir betrachten einen Normalteiler N der Gruppe G mit folgenden zwei Eigenschaften: G/N ist eine $L(\Sigma)$-Gruppe; entsteht die Untergruppe U von G aus N durch Adjunktion von weniger als n Elementen, so ist U eine $L(\Sigma)$-Gruppe. Wegen III und IV ist dann jede endlich erzeugbare Untergruppe von G/N NOETHERsch und fast-auflösbar; und wegen III und $1 < n$ ist jede N enthaltende Untergruppe U mit zyklischer Faktorgruppe U/N lokal-NOETHERsch. Anwendung von § 3, Satz 4 ergibt dann, daß G lokal-NOETHERsch ist. Sei nun U eine endlich erzeugbare Untergruppe von G. Dann ist $U/(U \cap N) \simeq NU/N$ als endlich erzeugbare Untergruppe der $L(\Sigma)$-Gruppe G/N eine Σ-Gruppe. Weiter sei V eine Untergruppe von U, die aus $U \cap N$ durch Adjunktion von weniger als n Elementen entsteht. Dann entsteht NV aus N ebenfalls durch Adjunktion von weniger als n Elementen, so daß also NV eine $L(\Sigma)$-Untergruppe von G ist. Da U eine endlich erzeugbare Untergruppe der lokal-NOETHERschen Gruppe G ist, so ist die Untergruppe V von U endlich erzeugbar. Als endlich erzeugbare Untergruppe der $L(\Sigma)$-Gruppe NV ist V eine Σ-Gruppe. Da schließlich Σ der Forderung E.n genügt, so folgt, daß U eine Σ-Gruppe ist; und damit ist gezeigt, daß G eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist, womit die Gültigkeit von E.n dargetan ist.

Bemerkung. Die Eigenschaft, NOETHERsch und fast-auflösbar zu sein, genügt dem Erweiterungspostulat E.1 [§ 3, Folgerung 2] und also auch E.2. Aus Satz 2 folgt also, daß die Eigenschaft:

„Alle endlich erzeugbaren Untergruppen sind NOETHERsch und fast-auflösbar" ebenfalls dem Erweiterungspostulat E.2 genügt. Daß E.1 von dieser Eigenschaft nicht erfüllt wird, kann durch viele naheliegende Beispiele belegt werden.

Wir wollen schließlich untersuchen, wie sich die gruppentheoretischen Teilerbeziehungen, die von Σ abgeleitet werden, zu denen verhalten, die von $L(\Sigma)$ abgeleitet werden. Es sei an die benötigten Definitionen und Haupteigenschaften erinnert; s. § 1. Wenn Θ eine gruppentheoretische Eigenschaft ist, so besagt $X\Theta^*Y$, daß X ein Normalteiler von Y ist, und daß jede X enthaltende Untergruppe U von Y mit Θ-Faktorgruppe U/X eine Θ-Gruppe ist; und $X\Theta Y$ besagt, daß X ein Normalteiler von Y ist, und daß XS eine Θ-Gruppe ist, wenn nur S eine Θ-Untergruppe von Y ist. Sind homomorphe Bilder von Θ-Gruppen wieder Θ-Gruppen, so folgt aus $X\Theta^*Y$ stets $X\Theta Y$. Wegen § 1, Satz 6 sind wir besonders an der Äquivalenz der Beziehungen $X\Theta Y$ und $X\Theta^*Y$ interessiert; vgl. auch § 3, Satz 5.

Satz 3. *Es sei N ein Normalteiler der Gruppe G.*

(a) *Dann und nur dann gilt $NL(\Sigma)^*G$, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe U von G mit Σ-Faktorgruppe $U/(N\cap U)$ eine Σ-Gruppe ist.*

(b) *Ist jede zyklische Untergruppe von G eine Σ-Gruppe, so gilt dann und nur dann $NL(\Sigma)G$, wenn $\{N, x\}$ lokal-NOETHERsch für jedes x in G ist, und wenn weiter WV für jede endlich erzeugbare Untergruppe W von N und für jede Σ-Untergruppe V des Normalisators von W eine Σ-Gruppe ist.*

(c) *Ist n eine positive ganze Zahl, so gilt dann und nur dann $NL(\Sigma)_nG$, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe U von G, die aus $U\cap N$ durch Adjunktion von weniger als n Elementen entsteht, eine Σ-Gruppe ist.*

Bemerkung. Beim Beweis von (a) und (c) wird von den Postulaten III und IV kein Gebrauch gemacht.

Beweis. Ist zunächst $NL(\Sigma)^*G$ und U eine endlich erzeugbare Untergruppe von G mit Σ-Faktorgruppe $U/(U\cap N)$, so ist auch NU/N eine Σ-Untergruppe von G/N. Da aber wegen I jede Σ-Gruppe eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist, so ist NU/N eine $L(\Sigma)$-Gruppe. Aus $NL(\Sigma)^*G$ folgt, daß NU eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist; und die endlich erzeugbare Untergruppe U der $L(\Sigma)$-Gruppe NU ist also eine Σ-Gruppe.

Sei umgekehrt jede endlich erzeugbare Untergruppe U mit Σ-Faktorgruppe $U/(U\cap N)$ eine Σ-Gruppe. Ist dann S eine N enthaltende Untergruppe von G mit $L(\Sigma)$-Faktorgruppe S/N und T eine endlich erzeugbare Untergruppe von S, so ist NT/N als endlich erzeugbare Untergruppe der $L(\Sigma)$-Gruppe S/N eine Σ-Gruppe. Die isomorphe Gruppe $T/(T\cap N)$ ist also ebenfalls eine Σ-Gruppe; und aus unserer Annahme folgt, daß T selbst eine Σ-Gruppe ist. Folglich ist S eine $L(\Sigma)$-Gruppe, womit die Gültigkeit von $NL(\Sigma)^*G$ dargetan ist. Damit ist (a) bewiesen.

Während des Beweises von (b) machen wir die zusätzliche Annahme, daß zyklische Untergruppen von G stets Σ-Gruppen sind. Gilt dann $NL(\Sigma)G$, so ist $\{N, x\} = N\{x\}$ für jedes x aus G das Produkt von N mit einer $L(\Sigma)$-Gruppe, da ja zyklische Untergruppen als Σ-Gruppen auch $L(\Sigma)$-Gruppen sind. Daraus folgt aber, daß jedes $\{N, x\}$ eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist. Da endlich erzeugbare Untergruppen von $L(\Sigma)$-Gruppen die Eigenschaft Σ haben, und da Σ-Gruppen wegen III NOETHERsch sind, so ist jedes $\{N, x\}$ lokal-NOETHERsch. Ist weiter W eine endlich erzeugbare Untergruppe von N und V eine Σ-Untergruppe des Normalisators von W, so ist V wegen III NOETHERsch, so daß also das Produkt WV eine endlich erzeugbare Untergruppe von G ist. Als Σ-Gruppe ist aber V auch eine $L(\Sigma)$-Gruppe und NV ist folglich ebenfalls eine $L(\Sigma)$-Gruppe [da ja $NL(\Sigma)G$ gilt]. Dann ist aber die endlich erzeugbare Untergruppe WV von NV eine Σ-Gruppe, womit die Notwendigkeit unserer Bedingungen dargetan ist.

Wir nehmen umgekehrt an, daß der Normalteiler N von G den Bedingungen von (b) genüge. Wir betrachten eine $L(\Sigma)$-Untergruppe T von G. Dann ist $NT/N \simeq T/(N \cap T)$ als homomorphes Bild von T eine $L(\Sigma)$-Gruppe, so daß also jede endlich erzeugbare Untergruppe von NT/N eine Σ-Gruppe und wegen III und IV NOETHERsch und fast-auflösbar ist. Da weiter jedes $\{N, x\}$ mit x in $NT \leqq G$ lokal-NOETHERsch ist, so ist NT wegen § 3, Satz 4 lokal-NOETHERsch. Ist weiter U eine endlich erzeugbare Untergruppe von NT, so existieren endliche Teilmengen E von N und F von T derart, daß $U \leqq \{E, F\} = V$ ist. Da $E \leqq V \cap N$ ist, so ist $V = (V \cap N)\{F\}$. Als endlich erzeugbare Untergruppe der $L(\Sigma)$-Gruppe T ist $\{F\}$ eine Σ-Gruppe, die natürlich im Normalisator des Normalteilers $V \cap N$ von V enthalten ist. Da V eine endlich erzeugbare Untergruppe der lokal-NOETHERschen Gruppe NT ist, so ist V NOETHERsch und also $V \cap N$ endlich erzeugbar. Aus unserer Bedingung folgt dann, daß $(V \cap N)\{F\} = V$ eine Σ-Gruppe ist. Die Untergruppe U von V ist also auch eine Σ-Gruppe; und NT ist mithin eine $L(\Sigma)$-Gruppe. Folglich gilt $NL(\Sigma)G$, womit der Beweis von (b) erbracht ist.

Den einfachen Beweis von (c) übergehen wir.

Folgerung 2. *Sind alle zyklischen Gruppen Σ-Gruppen, so folgt dann und nur dann aus $XL(\Sigma)Y$ stets $XL(\Sigma)^*Y$, wenn aus $U\Sigma V$ stets $U\Sigma^*V$ folgt.*

Wegen § 1, Satz 3 kann man also auch sagen, daß die $L(\Sigma)$-Teilerbeziehung dann und nur dann mit der $L(\Sigma)^*$-Teilerbeziehung äquivalent ist, wenn die Σ-Teilerbeziehung mit der Σ^*-Teilerbeziehung äquivalent ist.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß aus $XL(\Sigma)Y$ stets $XL(\Sigma)^*Y$ folge; und betrachten einen $N\Sigma G$ erfüllenden Normalteiler N der Gruppe G. Dann ist N insbesondere eine Σ-Gruppe. Weiter sei U eine N enthaltende Untergruppe von G mit Σ-Faktorgruppe U/N. Wegen III sind die beiden Σ-Gruppen N und U/N NOETHERsch; und also ist auch U NOETHERsch. Aus $N\Sigma G$ folgt natürlich auch $N\Sigma U$; und hieraus erschließen wir $NL(\Sigma)U$, da ja U NOETHERsch ist. Dann ist aber auch $NL(\Sigma)^*U$. Da U/N als Σ-Gruppe eine $L(\Sigma)$-Gruppe ist, so ist U eine NOETHERsche $L(\Sigma)$-Gruppe und

als solche ist U sogar eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe. Damit ist gezeigt, daß $N\mathfrak{Z}^*G$ gilt, wenn nur $N\mathfrak{Z}G$ gilt.

Umgekehrt folge aus $X\mathfrak{Z}V$ stets $X\mathfrak{Z}^*V$; und weiter sei N ein $NL(\mathfrak{Z})G$ erfüllender Normalteiler der Gruppe G. Ist x ein Element aus G, so ist $\{x\}$ eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe. Da $\mathfrak{Z}$-Gruppen auch $L(\mathfrak{Z})$-Gruppen sind, so ist $\{N, x\}$ das Produkt des $L(\mathfrak{Z})$-Teilers N von G mit der $L(\mathfrak{Z})$-Untergruppe $\{x\}$ von G, so daß also $\{N, x\}$ eine $L(\mathfrak{Z})$-Gruppe ist. Wegen III sind aber $L(\mathfrak{Z})$-Gruppen lokal-Noetherisch, so daß also $\{N, x\}$ für jedes x in G lokal-Noetherisch ist. Ist weiter U eine endlich erzeugbare Untergruppe von G mit $\mathfrak{Z}$-Faktorgruppe $U/(U\cap N)$, so ist auch die isomorphe Gruppe NU/N eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe. Da $\mathfrak{Z}$-Gruppen Noetherisch und fast-auflösbar sind, und da alle $\{N, x\}$ mit x in NU lokal-Noetherisch sind, so ist NU wegen § 3, Satz 4 lokal-Noetherisch und die endlich erzeugbare Untergruppe U von NU ist also Noetherisch. Ist V eine $\mathfrak{Z}$-Untergruppe von U, so liegt V in dem Normalisator der endlich erzeugbaren Untergruppe $N\cap U$ von N [und der Noetherschen Gruppe U]. Aus $NL(\mathfrak{Z})G$ und Satz 3, (b) folgt dann, daß $(N\cap U)V$ eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist; und damit ist $(N\cap U)\mathfrak{Z}U$ gezeigt. Daraus folgt aber nach Voraussetzung auch $(N\cap U)\mathfrak{Z}^*U$; und da $U/(U\cap N)$ eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist, so muß auch U eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe sein. Die Bedingungen von Satz 3, (a) sind also erfüllt. Folglich ist $NL(\mathfrak{Z})^*G$ eine Folge von $NL(\mathfrak{Z})G$, q.e.d.

Literatur

[1] Baer, Reinhold: Nilpotent groups and their generalizations. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 393—434 (1940). — [2] Baer, Reinhold: Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung. Math. Ann. **129**, 139—173 (1955). — [3] Baer, Reinhold: Nilgruppen. Math. Z. **62**, 402—437 (1955). — [4] Baer, Reinhold: Noethersche Gruppen. Math. Z. **66**, 269—288 (1956).

Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, Illinois (USA)

(Eingegangen am 30. Juni 1956)

Schubart, H., u. H. Wittich
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 364—370 (1957)

Über die Lösungen der beiden ersten Painlevéschen Differentialgleichungen

Von
Hans Schubart und Hans Wittich

Alle Lösungen der beiden ersten Painlevéschen Differentialgleichungen

$$(P_1) \qquad w'' = 6w^2 + a(z), \qquad a(z) = A_0 z + A,$$

$$(P_2) \qquad w'' = 2w^3 + b(z)\, w + C, \qquad b(z) = B_0 z + B$$

sind in $|z| < \infty$ eindeutige analytische Funktionen[1]). Da sowohl in (P_1) als auch in (P_2) nur ein Glied mit maximaler Dimension vorkommt, hat jede nichtrationale Lösung unendlich viele Polstellen[2]). Die Polstellenentwicklung lautet

$$w(z) = \frac{1}{(z-p)^2} + \cdots \qquad \text{für } (P_1)$$

und

$$w(z) = \frac{A_{-1}}{z-p} + \cdots, \quad A_{-1}^2 = 1 \qquad \text{für } (P_2).$$

Für $A_0 = 0$, $B_0 = 0$ erhält man die Differentialgleichungen

$$(P_1') \qquad w'' = 6w^2 + A,$$

$$(P_2') \qquad w'' = 2w^3 + Bw + C,$$

die sich mit Hilfe elliptischer Funktionen und ihrer Ausartungen integrieren lassen. Dies wird jedoch im folgenden nicht benötigt.

1. Jede nichtkonstante Lösung von (P_1') bzw. (P_2') genügt der Differentialgleichung

$$(1_1') \quad w'^2(z) = 4w^3(z) + 2A\, w(z) + w'^2(z_0) - 4w^3(z_0) - 2A\, w(z_0)$$

bzw.

$$(1_2') \quad w'^2(z) = w^4(z) + B\, w^2(z) + 2C\, w(z) + w'^2(z_0) - w^4(z_0) - B\, w^2(z_0) - 2C\, w(z_0).$$

Daraus folgt mit Hilfe der geometrischen Deutung der Charakteristik $T(r, w)$, daß jede Lösung der Differentialgleichungen (P_j') von endlicher Ordnung ist. Damit ergibt sich für die Schmiegungsfunktion $m(r, w)$ einer beliebigen Lösung $w(z)$ von (P_1') oder (P_2')

$$m(r, w) = O(\log r)\ ^3),$$

[1]) Siehe etwa Ince: Ordinary Differential Equations. Doover 1926.

[2]) Wittich, H.: Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, S. 13 u. f. u. S. 65. Berlin 1955.

[3]) Die Bezeichnungsweise folgt R. Nevanlinnas Lehrbuch, Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1953.

gültig für alle r. Beide Differentialgleichungen besitzen Lösungen, für die mindestens ein endlicher Wert c vollständig verzweigt ist, und zwar in dem Sinne, daß jede Wurzel der Gleichung $w(z)-c=0$ mehrfache Wurzel ist. Der Beweis ergibt sich aus $(1_1')$ so:

Eine Lösung $w=w(z)$, $w(z_0)=0$, $w'(z_0)=\tau$, von (P_1') genügt der Differentialgleichung

$$w'^2=4w^3+2Aw+\tau^2=P(w).$$

Nun läßt sich τ auf unendlich viele Arten so wählen, daß $P(w)$ mindestens eine einfache Nullstelle $w=c$ hat, also

$$(1_1')\quad \begin{cases} w'^2=4(w-c)\cdot Q(w) \\ \quad =4\left(Q(c)(w-c)+Q'(c)(w-c)^2+\frac{Q''(c)}{2!}(w-c)^3\right), \quad Q(c)\neq 0, \end{cases}$$

gilt. Aus

$$\frac{1}{4}\left(\frac{w'}{w-c}\right)^2=\frac{Q(c)}{w-c}+Q'(c)+\frac{Q''(c)}{2}(w-c)$$

folgt

$$m\left(r,\frac{1}{w-c}\right)=O(\log r),$$

d.h. der Wert c wird unendlich oft angenommen, wobei wegen des ersten Hauptsatzes die Beziehung

$$N\left(r,\frac{1}{w-c}\right)=N(r,w)+O(\log r)$$

besteht. Ist z_j eine beliebige c-Stelle, so folgt aus (P_1') $w'(z_j)=0$, $w''(z_j)\neq 0$. Danach erhält man

$$N_1\left(r,\frac{1}{w-c}\right)=\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{w-c}\right)$$

also

$$\vartheta(c)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N_1(r,c)}{T(r,w)}=\frac{1}{2}\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,c)}{N(r,c)+O(\log r)}=\frac{1}{2}.$$

c ist vollständig verzweigter Wert mit dem Verzweigungsindex $\vartheta(c)=\frac{1}{2}$. Jede Lösung $w(z)$, $w(z_0)=0$, $w'(z_0)=\tau$, von (P_2') löst die Differentialgleichung

$$w'^2(z)=w^4+Bw^2+2Cw+\tau^2=P(w).$$

Durch passende Wahl von τ kann man

$$(1_2')\qquad w'^2(z)=(w-c)\cdot Q(w), \qquad Q(c)\neq 0,$$

erreichen. Daraus folgt, genau wie eben, die Behauptung, wobei auch $\vartheta(c)=\frac{1}{2}$ gilt. Daß man durch passende Wahl von τ Lösungen von (P_0') bzw. (P_2') mit drei bzw. vier endlichen verzweigten Werten bekommt, soll nur angemerkt werden. Die Existenz von Lösungen mit mindestens einem vollständig verzweigten endlichen Wert ist charakteristisch für die Differentialgleichungen (P_1') und (P_2'). Es gilt nämlich der

Satz: *Die Differentialgleichungen (P_1) und (P_2) haben dann und nur dann Lösungen mit mindestens einem endlichen vollständig verzweigten Wert c, wenn die Koeffizienten A_0 und B_0 gleich Null sind.*

Ist c vollständig verzweigter Wert einer meromorphen Funktion $w(z)$, dann ist c entweder PICARDscher Ausnahmewert oder jede Wurzel von $w(z)-c=0$ ist mindestens Doppelwurzel. Im zweiten Falle folgt aus $n(r,c)\geqq 2\bar{n}(r,c)$ und $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\bar{N}(r,c)}{T(r,w)}\leqq\frac{1}{2}\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{N(r,c)}{T(r,w)}\leqq\frac{1}{2}$ für die Verzweigtheit $\Theta(c)$ der Stellensorte c

$$\Theta(c)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\bar{N}(r,c)}{T(r,w)}\geqq\frac{1}{2}.$$

Im Falle eines PICARDschen Ausnahmewertes ist $\Theta(c)=1$. Nach den obigen Bemerkungen ist der Satz vollständig bewiesen, wenn gezeigt wird, daß für $A_0\neq 0$, $B_0\neq 0$ und beliebiges endliches c stets $\Theta(c)<\frac{1}{2}$ gilt[4]).

2. Aus (P_1) und (P_2) folgt für jede Lösung $w(z)$ die Beziehung

$$m(r,w)=O\left(\log r\cdot T(r,w)\right)$$

für alle r außerhalb einer Menge von endlichem logarithmischem Maß. Nach P. BOUTROUX gilt mit endlichem K

$$N(r,w)<r^K.$$

Daraus schließt man, da $T(r,w)$ konvex in $\log r$ ist, daß jede Lösung $w(z)$ von endlicher Ordnung ist, was

$$m(r,w)=O(\log r)$$

und nach dem ersten Hauptsatz

$$T(r,w)=N(r,w)+O(\log r)$$

bedingt. Weiter folgt aus (P_1)

$$m\left(r,\frac{1}{w-c}\right)=O(\log r). \tag{2}$$

Dabei ist c beliebig und $w(z)$ eine beliebige Lösung von (P_1). Aus

$$w''=2(w^3-c^3)+b(z)(w-c)+D(z),\qquad D(z)=2c^3+b(z)c+C$$

ergibt sich für $C\neq 0$, d.h. $D(z)\not\equiv 0$, die Behauptung (2). Sie folgt auch noch auf die gleiche Art, wenn $C=0$ und $c\neq 0$ ist. Mithin verbleibt nur noch der Fall $C=0$, $c=0$[4]) [5]). Jede Lösung $w(z)$ der Differentialgleichung $w''=2w^3+b(z)w$ kann nach dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen den Wert Null höchstens einfach annehmen. $w(z)$ genügt auch der Differentialgleichung

$$w'^2=w^4+b(z)w^2-F(z),\qquad F'(z)=b'(z)w^2. \tag{3}$$

[4]) Man vgl. hierzu SCHUBART, H.: Zur Wertverteilung der PAINLEVEschen Transzendenten. Arch. Math. **7** (1956).

[5]) WITTICH, H.: Eindeutige Lösungen der Differentialgleichung $w''=P(z,w)$. Math. Ann. **1953**.

Mit $w(z)$ ist auch die in $|z|<\infty$ meromorphe Funktion $F(z)$ von endlicher Ordnung. Aus (3) folgt $m\left(r, \frac{F}{F'}\right) = O(\log r)$. Das ergibt zusammen mit $m\left(r, \frac{F'}{F}\right) = O(\log r)$

$$m\left(r, \frac{1}{F}\right) = m\left(r, \frac{1}{F'}\right) + O(\log r) = 2m\left(r, \frac{1}{w}\right) + O(\log r). \tag{3'}$$

Weiter erhält man aus (3) $m(r, F) = O(\log r)$, also nach dem ersten Hauptsatz

$$T(r, F) = T(r, w) + O(\log r), \tag{3''}$$

da $N(r, F) = N(r, w)$ gilt. Aus (3') und (3'') folgt

$$2\delta(0, w) = \delta(0, F) \leqq 1.$$

Jede transzendente Lösung $w(z)$ von $w'' = 2w^3 + b(z)w$ hat also unendlich viele Nullstellen, die alle einfach sind.

Falls die Bedingung $A_0 \neq 0$ oder $B_0 \neq 0$ nicht erfüllt ist, können PICARDsche Ausnahmewerte auftreten. Ist z. B. (P_1') von der Form

$$w'' = 6w^2 - 6c^2, \quad c \neq 0,$$

dann genügt die durch $w(0) = 0$, $w'(0) = 8c^3$ bestimmte Lösung der Differentialgleichung

$$w'^2 = 4w^3 - 12c^2 w + 8c^3 = 4(w - c)^2 (w + 2c).$$

Daraus erkennt man nach dem Eindeutigkeitssatz, daß c PICARDscher Ausnahmewert ist.

3. Da im Falle $C = 0$ der Wert $c = 0$ nicht vollständig verzweigt sein kann, ist für alle anderen zu betrachtenden Fälle die Beziehung (2) erfüllt. Aus (2) folgt

$$\Theta(c) = \lim_{r \to \infty} \frac{m(r, c) + N_1(r, c)}{T(r, w)} = \lim_{r \to \infty} \frac{N_1(r, c) + O(\log r)}{T(r, w)} = \lim_{r \to \infty} \frac{N_1(r, c)}{T(r, w)} = \vartheta(c),$$

so daß der Satz bewiesen ist, wenn $\vartheta(c) < \frac{1}{2}$ gezeigt wird.

Zunächst soll die für (P_1) und alle Werte $c \neq \infty$ bekannte Ungleichung[6]) $\vartheta(c) \leqq \frac{1}{4}$ noch etwas verbessert werden. Aus (P_1) folgt, wenn für unendlich viele Werte $z_0, z_1, \ldots$, $w(z_\nu) = c$, $w'(z_\nu) = 0$ gelten würde, daß höchstens von einem z_ν abgesehen, $w''(z_\nu) \neq 0$ sein muß[7]). Integriert man nun (P_1) längs solcher Wege, die die Pole von w vermeiden, so ergibt sich

$$w'^2 = 2a(z)w - 2a(z_0)c - 2\int_{z_0}^{z} a'(\zeta)\, w(\zeta)\, d\zeta + 4w^3 - 4c^3. \tag{4}$$

Mit $F(z) = \int_{z_0}^{z} a'(\zeta)\, (w(\zeta) - c)\, d\zeta$ gilt dann

$$F(z_\nu) = F'(z_\nu) = F''(z_\nu) = 0, \quad F'''(z_\nu) \neq 0.$$

---

[6]) WITTICH, H.: Siehe Fußnote 2, S. 81.

[7]) Siehe Fußnote 4.

Da $F(z)$ in $|z|<\infty$ eindeutig analytisch ist, gilt $m\left(r, \frac{1}{F}\right)=O(\log r)$, $T(r, w)=2T(r, F)+O(\log r)$ und $N_1\left(r, \frac{1}{F}\right)=2N_1\left(r, \frac{1}{w}\right)$.

Damit ist einmal $\vartheta(c, w)=\frac{1}{4}\vartheta(0, F)$, zum anderen wegen $N\left(r, \frac{1}{F}\right)\leqq 3\overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right)$ $\Theta(0, F)\leqq\frac{2}{3}$, woraus also

$$\vartheta(c, w)\leqq\tfrac{1}{6} \tag{5}$$

für alle Lösungen von (P_1) folgt.

Es liegt die Vermutung nahe, daß (P_1) keine Lösungen mit positivem Verzweigungsindex für endliches c besitzt.

Ein ähnliches Verfahren kann bei der Behandlung von (P_2) angewandt werden:

$w=w(z)$ sei eine Lösung von (P_2), die unendlich viele mehrfache c-Stellen $z_0, z_1, \ldots, c\neq\infty$, hat. Wegen $w''(z_j)=2c^3+b(z_j)c+C$ gilt, von höchstens einer Stelle abgesehen, $w''(z_j)\neq 0$ [im Falle $C=0$ hat die Gleichung $w(z)=0$ nur einfache Wurzeln]. Man darf also annehmen, daß die Stellen $z_0, z_1, \ldots$ doppelte c-Stellen sind. Durch Integration von (P_2) folgt[8])

$$w'^2=w^4-c^4+b(z)(w^2-c^2)+2C(w-c)-F(z) \tag{6}$$

mit $F(z)=\int_{z_0}^{z} b'(\zeta)(w^2-a^2)\,d\zeta$. Da $b'(z)\cdot(w^2(z)-a)$ nur Doppelpole besitzt, ist $F(z)$ in $|z|<\infty$ eindeutig analytisch. Nach (6) gilt $m(r, F)=O(\log r)$. Daraus ergibt sich zusammen mit $N(r, w)=N(r, F)$ nach dem ersten Hauptsatz

$$T(r, F)=T(r, w)+O(\log r).$$

Wegen $F(z_\nu)=0$, $F'(z_\nu)=0$, $F'''(z_\nu)\neq 0$ ist

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right)\geq N_1\left(r, \frac{1}{w-c}\right).$$

Nun erhält man weiter

$$\frac{N_1\left(r, \frac{1}{F}\right)}{T(r, F)}=\frac{N\left(r, \frac{1}{F}\right)-\overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right)}{T(r, F)}\leq 1-\frac{\overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right)}{T(r, F)}\leq 1-\frac{N_1\left(r, \frac{1}{w-c}\right)}{T(r, w)+O(\log r)},$$

also

$$\vartheta(0, F)\leqq 1-\vartheta(c, w). \tag{7}$$

Die doppelten c-Stellen $z_0, z_1, \ldots$ sind dreifache Nullstellen von $F(z)$, so daß

$$N_1\left(r, \frac{1}{F}\right)\geq 2N_1\left(r, \frac{1}{w-c}\right).$$

gilt, also auch

$$2\vartheta(c, w)\leqq\vartheta(0, F). \tag{7'}$$

Aus (7) und (7') folgt

$$2\vartheta(c, w)\leqq\vartheta(0, F)\leqq 1-\vartheta(c, w),$$

[8]) Dabei vermeidet der Integrationsweg wieder die Polstellen von $w(z)$.

also

$$\vartheta(c, w) \leqq \tfrac{1}{3}. \tag{8}$$

Das gilt für alle c [$c = \infty$ ist unverzweigter Wert, also $\vartheta(\infty, w) = 0$] und jede nichtrationale Lösung von (P_2).

Die Differentialgleichung

$$w'' = 2w^3 + zw + C, \qquad C = \pm\tfrac{1}{2}$$

besitzt Lösungen $w(z)$, für die kein Wert c einen positiven Verzweigungsindex hat. Das folgt aus der Tatsache, daß jede Lösung der RICCATIschen Differentialgleichungen

$$w' = \pm\left(\frac{z}{2} + w^2\right)$$

auch Lösung der Differentialgleichung

$$w'' = 2w^3 + zw \pm \tfrac{1}{2}$$

ist. Alle c-Stellen der Lösungen von $w' = \pm\left(\frac{z}{2} + w^2\right)$ sind, von höchstens einer Stelle abgesehen, einfach [9]). Immerhin ist aber die von $w = w(z)$ erzeugte Fläche doch so stark verzweigt (über unendlich vielen Grundpunkten), daß der Gesamtindex der algebraischen Verzweigtheit im Endlichen $\Phi_e = \varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{N(r, 1/w')}{T(r, w)}$ seinen maximalen Wert 2 erreicht.

Es gilt nämlich allgemein für jede transzendente Lösung von (P_2) $\Phi_e = 2$, falls $C \neq 0$ ist. Aus

$$\frac{w'''}{w'} = 6w^2 + b'(z) \cdot \frac{w}{w'} + b(z)$$

ergibt sich zunächst $m\left(r, \frac{w}{w'}\right) = O(\log r)$ und daraus $m\left(r, \frac{1}{w'}\right) = m\left(r, \frac{w}{w'} \cdot \frac{1}{w}\right)$ $= O(\log r)$ wegen $m\left(r, \frac{1}{w}\right) = O(\log r)$. Nun ist

$$T(r, w') = N\left(r, \frac{1}{w'}\right) + O(\log r) = 2T(r, w) + O(\log r),$$

also

$$\Phi_e = \varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r, 1/w')}{T(r, w)} = 2.$$

Die Lösungen von (P_1) genügen der Relation

$$\Phi_e + \vartheta(\infty) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} = 2.$$

4. Aus den letzten Beziehungen folgt, daß der zweite Hauptsatz für die Lösungen von (P_1) und (P_2) in eine asymptotische Gleichheit

$$N_1(r) + \sum_{j=1}^{q} m(r, c_j) = 2T(r, w) + O(\log r) \tag{9}$$

[9]) Siehe Fußnote 2, S. 73 u. f.

übergeht, gültig für alle r. Es ist zunächst $N_1(r) = N(r, 1/w') + 2N(r, w) - N(r, w')$, also

$$N_1(r) = \tfrac{3}{2} T(r, w) + \tfrac{1}{2} N(r, w) + O(\log r) = 2T(r, w) + O(\log r) \qquad \text{für } (P_1)$$

und

$$N_1(r) = 2T(r, w) + O(\log r) \text{ bzw. } N_1(r) + m\left(r, \frac{1}{w}\right) = 2T(r, w) + O(\log r) \text{ für } (P_2).$$

Daraus folgt die Behauptung (9), da außer für $C = 0$, $c = 0$ $m(r, c) = O(\log r)$ gilt.

Die transzendenten Lösungen von (P_1') und (P_2') genügen den Differentialgleichungen

$$w'^2 = P_3(w) \quad \text{und} \quad w'^2 = P_4(w),$$

wo je nach Wahl der Anfangsbedingungen gelten kann[10])

$$\begin{aligned}
&(10_1) \quad P_3(w) = 4(w - c_1)(w - c_2)(w - c_3)\\
&(10_2) \quad P_3(w) = 4(w - c)^2(w - 2c)\\
&(11_1) \quad P_4(w) = (w - c_1) \ldots (w - c_4)\\
&(11_2) \quad P_4(w) = (w - c)^2(w - c_3)(w - c_4)\\
&(11_3) \quad P_4(w) = (w - c)^2(w - c')^2.
\end{aligned}$$

Damit findet man

$$m\left(r, \frac{1}{w'}\right) = O(\log r) \quad \text{für } (10_1) \text{ und } (11_1),$$

$$m\left(r, \frac{1}{w'}\right) = m(r, c) + O(\log r) = T(r, w) + O(\log r) \quad \text{für } (10_2) \text{ und } (11_2),$$

$$m\left(r, \frac{1}{w'}\right) = m(r, c) + m(r, c') + O(\log r) = 2T(r, w) + O(\log r) \quad \text{für } (11_3).$$

Somit ergibt sich jeweils

$$\begin{aligned}
N_1(r) &= 2T(r, w) + O(\log r),\\
N_1(r) + m(r, c) &= 2T(r, w) + O(\log r),\\
N_1(r) + m(r, c) + m(r, c') &= 2T(r, w) + O(\log r),
\end{aligned}$$

also für jede transzendente Lösung der beiden ersten PAINLEVÉschen Differentialgleichungen die asymptotische Gleichheit (9). Ohne Rechnung folgt die Gültigkeit von (9), soweit es sich um Lösungen von (P_1') und (P_2') handelt, aus allgemeineren Sätzen über die Umkehrung des zweiten Hauptsatzes[11]).

[10]) Siehe Fußnote 2, S. 80 u. f.

[11]) Siehe Fußnote 2, S. 53 u. f.

Karlsruhe, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 30. Juni 1956)

Hellwig, G.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 371—388 (1957)

Über die Anwendung der Laplace-Transformation auf Randwertprobleme

Von
Günter Hellwig

Einleitung

Wir betrachten eine lineare *parabolische* Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Veränderlichen x, t mit $l \leqq x \leqq m$, $0 \leqq t < \infty$, deren Koeffizienten, abgesehen vom inhomogenen Glied, nur von x abhängig sind. Eine solche Gleichung darf in der Gestalt

$$(1) \qquad \bar{D}u \equiv \bar{A}u + b(x)\,u_t = f(x,t) \quad \text{mit} \quad \bar{A}u \equiv -\left(p(x)\,u_x\right)_x + q(x)\,u$$

angenommen werden. Dabei sei $p(x) > 0$, $b(x) > 0$ in $l \leqq x \leqq m$. Die Lösung $u(x,t)$ von (1) soll noch geeignete Anfangs- und Randbedingungen erfüllen. In den Anwendungen zeichnen sich die letzteren durch ihre große Vielfachheit aus. Um in dieser Hinsicht allen Anforderungen gerecht zu werden, betrachten wir mit (1) das

$$\textit{Problem I:} \quad \bar{D}u = f(x,t), \quad \lim_{t \to 0} u(x,t) = u_0(x),$$

$$\bar{R}_i u \equiv a_{i1}\,u(l,t) + a_{i2}\,u_x(l,t) + a_{i3}\,u_t(l,t)$$
$$+ b_{i1}\,u(m,t) + b_{i2}\,u_x(m,t) + b_{i3}\,u_t(m,t) = f_i(t),$$

$i = 1, 2$. Dabei sind $u_0(x)$, $f_i(t)$ willkürlich vorzuschreibende Funktionen, $a_{i1}, \ldots, b_{i3}$ sind Konstante. Zwischen u_0 und f_i bestehen keinerlei *Verträglichkeitsbedingungen*[1]), wie überhaupt bei solchen allgemeinen Randbedingungen Verträglichkeitsbedingungen nicht mehr sinngemäß formuliert werden können. Das Erfülltsein der Differentialgleichung wird dabei in $l < x < m$, $0 < t < \infty$, die Annahme der Anfangswerte für $l < x < m$ und das Bestehen der Randbedingungen für $t > 0$ gefordert. Dabei muß natürlich noch präzisiert werden, was etwa $u_t(l,t)$ zu bedeuten hat. Wir sind daran interessiert, daß zeitliche Ableitungen in den Randbedingungen tatsächlich auftreten, da dadurch neue Schwierigkeiten entstehen und machen die Voraussetzung

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_{13}, & b_{13} \\ a_{23}, & b_{23} \end{vmatrix} \neq 0,$$

von der man sich aber weitestgehend wieder befreien kann.

[1]) Wird etwa der Spezialfall $R_1 u = u(l,t) = f_1(t)$ betrachtet, so braucht *nicht* $f_1(0) = u_0(0)$ zu sein.

In der vorliegenden Arbeit soll ein Existenzsatz für das Problem I gegeben werden, der so beschaffen ist, daß die Lösung $u(x,t)$ sich vollständig mit Hilfe der LAPLACE-Transformation bestimmen läßt, insbesondere also eine Darstellung durch das komplexe Umkehrintegral zuläßt.

Betrachtet man die Transformation $\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\,dt = v(x,s)$, wobei $s=\xi+i\eta$ ein komplexer Parameter ist, so sagt man, daß v durch Anwendung des LAPLACEschen Operators $L \equiv \int_0^\infty e^{-st}\{\}\,dt$ aus u entstanden ist und schreibt $v=Lu$. Man hat die formalen Rechenregeln

$$Lu_t = sv - \lim_{t\to 0} u(x,t), \tag{3}$$

$$u = L^{-1}v \equiv \frac{1}{2\pi i}\,\text{H.W.}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{st}v(x,s)\,ds. \tag{4}$$

Durch formale Anwendung des L-Operators auf das Problem I ergibt sich mit den Festsetzungen $Lf=g$, $Lf_i=g_i$ das

Problem II:
$$\begin{aligned} Dv &\equiv Av + s\,b(x)v = g(x,s) + b(x)\,u_0(x),\\ R_iv &\equiv (a_{i1}+s\,a_{i3})\,v(l,s) + a_{i2}v'(l,s)\\ &\quad + (b_{i1}+s\,b_{i3})\,v(m,s) + b_{i2}v'(m,s) = h_i(s) \end{aligned}$$

mit $Av \equiv -(pv')' + qv$, $h_i(s) = g_i(s) + a_{i3}u_0(l) + b_{i3}u_0(m)$ und $' \equiv \frac{d}{dx}$.

Ist v die Lösung von II, so soll durch (4) die Lösung von I gegeben werden. Dazu wird man I und II in Teilprobleme zerlegen:

$$\mathrm{I}_1\colon \begin{cases} \overline{D}u = 0\\ \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = u_0(x),\\ \overline{R}_i u = 0 \end{cases} \quad \mathrm{I}_2\colon \begin{cases} \overline{D}u = 0 \ ^{2)}\\ \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = 0,\\ \overline{R}_i u = f_i \end{cases} \quad \mathrm{I}_3\colon \begin{cases} \overline{D}\,u = f(x,t)\\ \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = 0;\\ \overline{R}_i u = 0; \end{cases}$$

$$\mathrm{II}_1\colon \begin{cases} Dv = b(x)\,u_0(x)\\ R_iv = 0 \end{cases} \quad \mathrm{II}_2\colon \begin{cases} Dv = 0\\ R_iv = h_i, \end{cases} \quad \mathrm{II}_3\colon \begin{cases} Dv = g(x,s)\\ R_iv = 0. \end{cases}$$

Die Summe der Lösungen der Teilprobleme ergibt jeweils die Lösung von I bzw. II. Man beachte jedoch, daß wohl II aus I aber nicht II_i aus I_i durch formale Anwendung des L-Operators entstanden ist. Dies ist nur für $a_{i3}u_0(l) + b_{i3}u_0(m) = 0$ richtig. Trotzdem werden wir zeigen, daß die Lösungen $u_i(x,t)$ von I_i aus den Lösungen $v_i(x,s)$ von II_i mit Hilfe des Umkehroperators (4) gewonnen werden können: $u_i = L^{-1}v_i$. Die störenden Zusatzterme beziehen sich nämlich lediglich auf die Punkte $(l,0)$, $(m,0)$ der x,t-Ebene, in denen wir die Lösung $u(x,t)$ bei unserer allgemeinen Problemstellung ohnehin nicht untersuchen werden.

[2]) I_2 sind die sog. Ausgleichsprobleme.

Jedes Teilproblem ist von einem anderen Schwierigkeitsgrad. Während man bei I_2, I_3 durch entsprechende Voraussetzungen über $f(x,t)$, $f_i(t)$ im transformierten Bereich (II_2, II_3) stets solche günstigen Verhältnisse herstellen kann, daß eben die Beziehung $u_i = L^{-1}v_i$, $i=2,3$ leicht beweisbar wird, hat man solche Hilfsmittel für das Problem I_1 nicht. Dieses muß vielmehr als das zentrale Problem angesehen werden, an dem es die Leistungsfähigkeit der LAPLACE-Transformation zu erproben gilt. Wir werden daher uns ganz auf dieses Problem konzentrieren und in einer späteren Note in knapper Form über die Probleme I_2 und I_3 berichten.

Es sei $G(x,y,s)$ die GREENsche Resolvente, dann erscheint die Lösung von II_1 in der Gestalt

$$v_1(x,s) = \int_l^m G(x,y,s)\, b(y)\, u_0(y)\, dy. \tag{5}$$

Wir beweisen den

Satz. *Sei $p''(x), b'(x), q(x)$ in $l \leqq x \leqq m$ stetig und von beschränkter Schwankung mit $p>0$, $b>0$; ferner sei $u_0'''(x)$ dort stetig. Dann ist*

$$u(x,t) = \begin{cases} L^{-1}v_1 \equiv \dfrac{1}{2\pi i}\,\text{H.W.}\displaystyle\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{st}\left(\int_l^m G(x,y,s)\, b(y)\, u_0(y)\, dy\right) ds \text{ [3]} \\ \quad = \lim\limits_{\beta\to\infty} \sum\limits_{|s_\nu|<\beta} e^{s_\nu t} R_\nu(x,t) \end{cases} \tag{6}$$

bei passendem $\xi_1>0$ die Lösung von I_1. $e^{s_\nu t}R_\nu(x,t)$ ist dabei das Residuum von $e^{st}\int_l^m G(x,y,s)\, b(y)\, u_0(y)\, dy$ für den Pol $s=s_\nu$ von G.

(a) *Es sind u, u_x, u_t, u_{xx} in $l<x<m$, $0<t<\infty$ stetig und u erfüllt dort $\overline{D}u=0$.*

(b) *u, u_x ist sogar in $l<x<m$, $0\leqq t<\infty$ stetig, und es gilt dort*

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = u_0(x).$$

(c) *u, u_x sind in $l\leqq x\leqq m$, $0<t<\infty$ stetig.*

(d) *Definieren wir $u_t(l,t) \equiv \dfrac{\partial}{\partial t}\lim\limits_{x\to l} u(x,t)$, $u_t(m,t) \equiv \dfrac{\partial}{\partial t}\lim\limits_{x\to m} u(x,t)$, so ist $u_t(l,t)$, $u_t(m,t)$ für $t>0$ stetig und es gilt dort $R_i u = 0$.*

Unsere Betrachtungen können als eine Ausführung der COURANTschen Problemstellung ([5], S. 202—222) für den Fall der parabolischen Gleichungen angesehen werden. R. COURANT betrachtet in [5] für den parabolischen Fall zu (1) die Randbedingungen

$$\overline{R}_1 u \equiv u(l,t) = f_1(t), \quad \overline{R}_2 u \equiv b_{21}u(m,t) + b_{22}u_x(m,t) + b_{23}u_t(m,t) = 0. \tag{7}$$

[3] Auf die Frage nach der Vertauschung der Integrationsreihenfolge, die besonders für die praktische Anwendung von Interesse ist, wird hier nicht eingegangen.

Er fordert unter anderem, daß die Lösung $v(x, s)$[4]) des Problems II gewissen Abschätzungen genügt. Zum Beispiel:

$$(8) \qquad |v(x,s)| \leqq \Phi(|\eta|) \quad \text{mit} \quad \int_0^\infty \Phi(\tau)\, d\tau < \infty, \quad s = \xi + i\eta.$$

Der Nachweis für das Bestehen solcher Ungleichungen für den Fall I_1 scheint zumindest schwierig zu sein. Sie können sehr wohl für die Ausgleichprobleme I_2 und für I_3 bestehen, wie COURANT an Beispielen nachgewiesen hat.

W. MÄCHLER [*10*] betrachtet für hyperbolische und parabolische Gleichungen die Randbedingungen

$$(9) \qquad \overline{R}_i u \equiv a_{i1} u(l,t) + a_{i2} u_x(l,t) + b_{i1} u(m,t) + b_{i2} u_x(m,t) = 0$$

und fordert, daß die Anfangsbedingungen die Randbedingungen erfüllen. Diese Forderung ist für seine Beweistechnik wesentlich. Manche Anregung fanden wir in den Betrachtungen von R. V. CHURCHILL [*2*], [*3*] und G. DOETSCH [*6*] für die Wärmeleitungsgleichung mit einfachen Randbedingungen.

In § 1 geben wir eine genaue Untersuchung des transformierten Problems II. Die dabei gewonnene asymptotische Entwicklung der GREENschen Resolvente dürfte auch von sich aus von Interesse sein. Der § 2 beschäftigt sich mit der Rücktransformation, wobei der Beweis unseres Satzes nur durch recht verschiedenartige Betrachtungen und in zahlreichen Schritten gelingt. Entscheidend für unser Verfahren erweist sich ein in § 2, Nr. 1 benutzter Kunstgriff, der erst einigermaßen erträgliche Konvergenzverhältnisse für die Rücktransformation schafft.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir den Fall $p(x) = b(x) = 1$, $l = 0$, $m = 1$ an, der stets mit Hilfe einer wohlbekannten Transformation herstellbar ist.

Völlig andere Verhältnisse liegen vor, wenn man die in unserem Satz bezüglich $p(x)$, $b(x)$ gemachten Voraussetzungen nur noch im offenen Intervall $l < x < m$ fordert. Dann kann unter anderem der Fall eintreten, daß Randbedingungen überhaupt nicht mehr gestellt werden dürfen. Man vgl. dazu W. FELLER [*13*], die Arbeit [*9*] des Verf., sowie die in Kürze erscheinende Darstellung bei G. DOETSCH [*14*].

§ 1. Die Lösung des transformierten Problems II

1. Fundamentalsystem und GREENsche *Resolvente*

Wir betrachten den Operator $Av = -v'' + q(x)v$ in dem Definitionsbereich $\mathfrak{A}$: v, v', v'' stetig in $0 \leqq x \leqq 1$, $R_i v = 0$. Setzen wir $A + sI = A_s$ (I der Einheitsoperator), so wird die Lösung von $A_s v = f$, $R_i v = 0$ mit stetigem

[4]) Unser v ist bei COURANT durch v/s zu ersetzen.

$j(x)$ und komplexen Parameter $s=\xi+i\eta$ durch

$$v = A_s^{-1} j \equiv \int_0^1 G(x, y, s)\, j(y)\, dy \tag{1.1}$$

gegeben, falls die GREENsche Resolvente G existiert. In diesem Falle läßt sich umgekehrt jedes $v \in \mathfrak{A}$ in der Form (1.1) schreiben, wozu lediglich $j = A_s v$ zu setzen ist. Die Lösung des Problems (II) erscheint dann in der Gestalt

$$\begin{cases} v = \int_0^1 G(x, y, s)\, (u_0(y) + g(y, s))\, dy + \\ \qquad + \sum_{k=1}^{2} (g_k(s) + a_{k3} u_0(0) + b_{k3} u_0(1))\, G_k(x, s). \end{cases} \tag{1.2}$$

Aus einem Fundamentalsystem v_1, v_2 von $A_s v = 0$ können G und G_k explizit aufgebaut werden. Bekanntlich ist

$$G(x, y, s) = -\frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} v_1, & v_2, & \gamma \\ R_1 v_1, & R_1 v_2, & R_1 \gamma \\ R_2 v_1, & R_2 v_2, & R_2 \gamma \end{vmatrix}, \quad G_k(x, s) = \frac{\Delta_k(x, s)}{\Delta(s)}, \tag{1.3}$$

wobei sich G_k aus den Forderungen $A_s G_k = 0$, $R_i G_k = \delta_{ik}$ ergibt. In (1.3) sind die Abkürzungen verwendet worden:

$$\begin{cases} \Delta(s) = \begin{vmatrix} R_1 v_1, & R_1 v_2 \\ R_2 v_1, & R_2 v_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1(x, s) = \begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ R_2 v_1, & R_2 v_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2(x, s) = -\begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ R_1 v_1, & R_1 v_2 \end{vmatrix}, \\ \gamma(x, y, s) = \pm \frac{1}{\delta(y, s)} \begin{vmatrix} v_1(x, s), & v_2(x, s) \\ v_1(y, s), & v_2(y, s) \end{vmatrix} \begin{matrix} + \text{ für } x \geqq y, \\ - \text{ für } x \leqq y, \end{matrix} \\ \delta(x, s) = \begin{vmatrix} v_1'(x, s), & v_2'(x, s) \\ v_1(x, s), & v_2(x, s) \end{vmatrix} = \delta(0, s). \end{cases} \tag{1.4}$$

Die v_i können als ganze transzendente Funktionen gewählt werden, woraus ersichtlich ist, daß $G(x, y, s)$ in der s-Ebene eine meromorphe Funktion in s ist. G existiert bekanntlich genau für solche s-Werte, für die $\Delta(s) \neq 0$ ist.

Es ist nützlich, die weiteren Betrachtungen zunächst in einer ϱ-Ebene mit $s = \varrho^2$, $\varrho = \zeta + i\mu$ durchzuführen. Die dabei auftretende Mehrdeutigkeit bei der Umkehrung $\varrho = \sqrt{s}$ ist belanglos. Man darf sie durch die Festsetzung, daß ϱ für reelles positives s selbst reell und positiv ist, beseitigen.

Für ein Fundamentalsystem v_i von

$$A_{\varrho^2} v \equiv -v'' + q(x)\, v + \varrho^2 v = 0 \tag{1.5}$$

gilt im Bereich $\mathfrak{B}_1 (|\varrho| \geqq R, \zeta \geqq \zeta_0$ mit ζ_0 einer festen Konstanten) der ϱ-Ebene die Darstellung ([*12*], [*4*] S. 308)

$$\begin{cases} v_k = v_k(x, \varrho^2) = e^{\varrho \varphi_k x} \left\{1 + \frac{[\varphi_k Q(x)]}{\varrho}\right\}, \\ v_k' = e^{\varrho \varphi_k x}\, \varrho\, \varphi_k \left\{1 + \frac{[\varphi_k Q(x)]}{\varrho}\right\}, \quad k = 1, 2. \end{cases} \tag{1.6}$$

Dabei ist $\varphi_1 = -\varphi_2 = 1$ und $Q(x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\,d\tau$. Unter $[\alpha]$ verstehen wir den BIRKHOFFschen Ausdruck $[\alpha] = \alpha + \frac{E}{\varrho}$, wobei E eine von ϱ, x und eventuell anderen Variablen abhängige Größe ist, die in allen Variablen für große $|\varrho|$ stetig und gleichmäßig beschränkt ist. Fernerhin werden solche E-Größen, die zwar von Formel zu Formel verschieden sein mögen, in der Bezeichnungsweise nicht unterschieden. Unser v_1 in (1.6) hat also eine Darstellung der Form

$$v_1(x,\varrho^2) = e^{\varrho x}\left\{1 + \frac{1}{\varrho}Q(x) + \frac{E(x,\varrho)}{\varrho^2}\right\}.$$

Die gleichen Darstellungen (1.6) mit anderen E-Größen gelten auch in $\mathfrak{B}_2$ ($|\varrho| \geqq R, \zeta \leqq \zeta_0$ mit ζ_0 einer festen Konstanten).

2. Asymptotische Abschätzungen der GREENschen *Resolvente*

Solche sind von BIRKHOFF [*1*] und TAMARKIN [*12*] für $|\varrho| \geqq R$ gegeben worden. Für unseren Operator A_{ϱ^2} und den speziellen Randbedingungen $R_i v = 0$ mit $a_{i3} = b_{i3} = 0$ findet man sehr scharfe Abschätzungen bei CODDINGTON und LEVINSON [*4*]. Wir benötigen nicht so sehr solche Abschätzungen, als vielmehr eine sehr genaue asymptotische Entwicklung der Resolvente für unseren allgemeinen Fall und geben eine knappe Herleitung.

Mit (2) haben wir

$$A = -\begin{vmatrix} a_{13} & b_{13} \\ a_{23} & b_{23} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.7}$$

Setzt man (1.6) in $R_i v_k$ ein, so erhält man in $\mathfrak{B}_1$

$$R_i v_k = \varrho^2\left\{a_{i3} + \frac{1}{\varrho}[a_{i2}\varphi_k] + e^{\varrho\varphi_k}\left(b_{i3} + \frac{1}{\varrho}[b_{i2}\varphi_k + b_{i3}\varphi_k Q(1)]\right)\right\}. \tag{1.8}$$

Für (1.8) schreiben wir

$$R_i v_k = \varrho^2\left\{a_{i3} + \frac{[\varkappa]}{\varrho} + e^{\varrho\varphi_k}\left(b_{i3} + \frac{[\varkappa]}{\varrho}\right)\right\}, \tag{1.9}$$

wobei $\varkappa$ eine *jeweils* passend zu wählende Konstante ist. Wird damit die Determinante Δ aus (1.4) gebildet, so findet man in $\mathfrak{B}_1$

$$\Delta = \varrho^4 e^{\varrho}\left\{C(\varrho) + \frac{[\varkappa + \varkappa e^{-\varrho} + \varkappa e^{-2\varrho}]}{\varrho}\right\}, \quad C(\varrho) = A(1 - e^{-2\varrho}) \tag{1.10}$$

mit jeweils passenden Konstanten $\varkappa$. In $\mathfrak{B}_2$ würde man finden

$$\Delta = \varrho^4 e^{-\varrho}\left\{C^*(\varrho) + \frac{[\varkappa + \varkappa e^{\varrho} + \varkappa e^{2\varrho}]}{\varrho}\right\}, \quad C^*(\varrho) = A(e^{2\varrho} - 1). \tag{1.11}$$

Die Nullstellen von C und C^* sind $\varrho_k = k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Schließt man diese durch kleine Kreise mit Radius r aus (gelochte ϱ-Ebene), so gilt dort $|C(\varrho), |C^*(\varrho)| \geqq m(r) > 0$. Man zeigt nun leicht mit dem Satz von

ROUCHÉ, daß Δ in der ϱ-Ebene ebenfalls unendlich viele Nullstellen hat, die bis auf endlich viele einfach sind und in obigen Kreisen liegen. Die endlich vielen Nullstellen liegen jedenfalls in einem festen Rechteck in der ϱ-Ebene. Daher gibt es mit $s=\varrho^2$ in der s-Ebene eine rechte Halbebene $\xi \geqq \xi_1$ mit $\xi_1 > 0$, die frei von Nullstellen von $\Delta(s)$ ist.

Zur Berechnung von G (1.3) beschränken wir uns zunächst wieder auf $\mathfrak{B}_1$ und multiplizieren die erste Spalte in (1.3) mit $-\frac{1}{2}\frac{v_1(x)\,v_2(y)}{\delta(y,\varrho^2)}$, die zweite mit $-\frac{1}{2}\frac{v_1(y)\,v_2(x)}{\delta(y,\varrho^2)}$ und addieren zur letzten Spalte. Mit (1.3), (1.4) erscheint G in der Gestalt

$$G=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} v_1\,, & v_2\,, & \gamma_0 \\ R_1 v_1, & R_1 v_2, & \gamma_1 \\ R_2 v_1, & R_2 v_2, & \gamma_2 \end{vmatrix} = -\gamma_0+\gamma_1 G_1+\gamma_2 G_2. \tag{1.12}$$

Dabei ist gesetzt:

$$-\gamma_0(x,y,\varrho^2)=\begin{cases} \frac{1}{\delta}\,v_1(y)\,v_2(x) & \text{für } x \geqq y, \\ \frac{1}{\delta}\,v_1(x)\,v_2(y) & \text{für } x \leqq y, \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\gamma_i(y,\varrho^2)=-\frac{1}{\delta(y,\varrho^2)}\left\{\begin{matrix}\big((a_{i1}+\varrho^2 a_{i3})\,v_1(0)+a_{i2}v_1'(0)\big)\,v_2(y)+\\ +\big((b_{i1}+\varrho^2 b_{i3})\,v_2(1)+b_{i2}v_2'(1)\big)\,v_1(y)\end{matrix}\right\}. \tag{1.14}$$

Beachtet man, daß sich δ mit (1.4) und (1.6) in der Gestalt

$$\delta(x,\varrho^2)=\delta(0,\varrho^2)=2\varrho\left\{1+\frac{[0]}{\varrho}\right\} \tag{1.15}$$

ergibt, so folgt für (1.13) die Darstellung

$$-\gamma_0=\frac{1}{2\varrho}\,e^{-\varrho|x-y|}\left\{1+\frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{\varrho}\,[Q(y)-Q(x)]\right\}. \tag{1.16}$$

Für γ_i erhält man mit etwas Zwischenrechnung und (1.6)

$$\gamma_i=-\varrho\left\{\left(\frac{a_{i3}}{2}+\frac{[\varkappa(y)]}{\varrho}\right)e^{-\varrho y}+\left(\frac{b_{i3}}{2}+\frac{[\varkappa(y)]}{\varrho}\right)e^{-\varrho(1-y)}\right\}. \tag{1.17}$$

Dabei ist $\varkappa(y)$ eine *jeweils* passend zu wählende stetig differenzierbare Funktion von y in $0 \leqq y \leqq 1$. Mit leichter Zwischenrechnung findet man für G_1, G_2 mit (1.3), (1.4), (1.6) den Aufbau

$$\left\{\begin{matrix} G_1(x,\varrho^2)=\frac{\varrho^2}{\Delta}\left\{\left(a_{23}+\frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right)e^{\varrho x}-\left(a_{23}+\frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right)e^{-\varrho x}+\right. \\ \left.+\left(b_{23}+\frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right)e^{\varrho(x-1)}-\left(b_{23}+\frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right)e^{-\varrho(x-1)}\right\}, \end{matrix}\right. \tag{1.18}$$

$$\left\{\begin{matrix} G_2(x,\varrho^2)=-\frac{\varrho^2}{\Delta}\left\{\left(a_{13}+\frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right)e^{\varrho x}-\left(a_{13}+\frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right)e^{\varrho x}+\right. \\ \left.+\left(b_{13}+\frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right)e^{\varrho(x-1)}-\left(b_{13}+\frac{[\varkappa(x)]}{\varrho}\right)e^{-\varrho(x-1)}\right\} \end{matrix}\right. \tag{1.19}$$

mit jeweils passendem, stetig differenzierbarem $\varkappa(x)$. Bei der Herstellung von $\gamma_1 G_1 + \gamma_2 G_2$ multipliziere man zunächst die Glieder in den geschweiften Klammern aus, die keine ϱ-Potenz im Nenner haben. Man findet mit (1.7) den Ausdruck

$$(1.20)\quad \frac{\varrho^3}{\Delta} H_1(x, y, \varrho) = \frac{\varrho^3}{\Delta} \cdot \frac{A}{2} \left\{ e^{-\varrho y} \left(e^{\varrho(x-1)} - e^{-\varrho(x-1)} \right) - e^{-\varrho(1-y)} \left(e^{\varrho x} - e^{-\varrho x} \right) \right\}.$$

Mit der Größe $\alpha_i(x, y)$, die für einen der Ausdrücke

$$(1.21)\quad \alpha_i : y-x,\ y+x,\ x-y,\ y-x+1,\ y+x-1,\ 1-y-x,\ x-y+1,\ 2-y-x$$

zu setzen ist, ergibt sich der endgültige Aufbau

$$(1.22)\quad \gamma_1 G_1 + \gamma_2 G_2 = \frac{\varrho^3}{\Delta} \left\{ H_1(x, y, \varrho) + \frac{1}{\varrho} \sum_i \left(\varkappa_i(x) + \tilde{\varkappa}_i(y) + \frac{E_i(x, y, \varrho)}{\varrho} \right) e^{-\alpha_i \varrho} \right\}$$

mit jeweils passendem stetig differenzierbaren $\varkappa_i$, $\tilde{\varkappa}_i$ und stetigem E_i. Es ist $\alpha_i + 1 \geqq 0$ für $0 \leqq x, y \leqq 1$. Benutzen wir die aus (1.10), (1.11) fließenden rohen Darstellungen für $1/\Delta$:

$$(1.23)\quad \frac{1}{\Delta} = \frac{e^{-\varrho}[1]}{\varrho^4 C(\varrho)} \text{ in } \mathfrak{B}_1, \qquad \frac{1}{\Delta} = \frac{e^{\varrho}[1]}{\varrho^4 C^*(\varrho)} \text{ in } \mathfrak{B}_2,$$

so erkennt man, daß die in (1.22) auftretenden e-Funktionen die Gestalt $e^{-\varrho(\alpha_i+1)}$ in $\mathfrak{B}_1$ haben. In $\mathfrak{B}_2$ würde man entsprechend $e^{\varrho(\alpha_i+1)}$ finden. Sie sind damit alle dem Betrag nach gleichmäßig beschränkt. Man erhält damit für G (1.12) mit (1.1) das folgende

Lemma 1. *In der gelochten ϱ-Ebene gelten für $|\varrho| \geqq R$ und $0 \leqq x \leqq 1$ die Abschätzungen*

$$(1.24)\quad |A_{\varrho^2}^{-1} j| \leq \frac{M_1}{|\varrho|}, \quad \left| \frac{d}{dx} A_{\varrho^2}^{-1} j \right| \leq M_2 \qquad \textit{für stetiges } j,$$

$$(1.25)\quad |A_{\varrho^2}^{-1} j| \leq \frac{M_3}{|\varrho|^2}, \quad \left| \frac{d}{dx} A_{\varrho^2}^{-1} j \right| \leq \frac{M_4}{|\varrho|} \qquad \textit{für } j, j' \textit{ stetig.}$$

Dabei können bei festem j die Konstanten M_i als nur von dem Radius r der ausgeschnittenen Kreise abhängig gedacht werden. Entsprechende Abschätzungen hat man in der gelochten $s = \varrho^2$-Ebene: $|A_s^{-1} j| \leq \frac{M_1}{\sqrt{|s|}}$ bei stetigem j usw.

Dabei wird die Abschätzung (1.25 a) durch partielle Integration gewonnen, die nur an den Gliedern auszuführen ist, die keine $1/\varrho^2$-Potenzen tragen. Die Abschätzungen für die d/dx-Ableitungen erhält man mit der Bemerkung, daß bei $G_x(x, y, \varrho^2)$ die Differentiation nur an den e-Funktionen vorzunehmen ist, wie aus (1.6) ersichtlich ist.

3. *Asymptotische Darstellung der* GREENschen *Resolvente*

Wir beschränken uns zunächst wieder auf den Bereich $\mathfrak{B}_1$ der gelochten ϱ-Ebene. Mit (1.23) findet man dort

$$(1.26)\quad \frac{1}{\Delta} = \frac{e^{-\varrho}}{\varrho^4 C(\varrho)} + \frac{e^{-\varrho} \tilde{E}(\varrho)}{\varrho^5 C(\varrho)} = \frac{1}{2A \varrho^4 \operatorname{Sin} \varrho} + \frac{e^{-\varrho} \tilde{E}(\varrho)}{\varrho^5 C(\varrho)},$$

wobei $\widetilde{E}(\varrho)$ mit (1.10) durch

$$\widetilde{E}(\varrho) = \varkappa + \varkappa e^{-\varrho} + \varkappa e^{-2\varrho} + \frac{1}{\varrho}\overline{E}(\varrho) \tag{1.26a}$$

gegeben ist. Nun faßt man nach Einsetzen von Δ die $1/\varrho$-Glieder in (1.22) mit denen von (1.16) zusammen. Es ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} P(x,y,\varrho^2) &= \frac{1}{2\varrho}\, e^{-\varrho|x-y|} + \frac{H_1(x,y,\varrho)}{2A\,\varrho\,\mathfrak{Sin}\,\varrho} \\ &= \frac{1}{\varrho\,\mathfrak{Sin}\,\varrho}\begin{cases} \mathfrak{Sin}\,\varrho(1-x)\,\mathfrak{Sin}\,\varrho\,y & \text{für } x \geq y \\ \mathfrak{Sin}\,\varrho(1-y)\,\mathfrak{Sin}\,\varrho\,x & \text{für } x \leq y. \end{cases} \end{aligned}\right. \tag{1.27}$$

Mit (1.16), (1.22), (1.27) findet man schließlich in $\mathfrak{B}_1$ die *asymptotische Darstellung*

$$G(x,y,\varrho^2) = \left\{\begin{aligned} &P(x,y,\varrho^2) + \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{2\varrho^2}\left(Q(y)-Q(x)\right)e^{-\varrho|x-y|} + \\ &+ \frac{E}{\varrho^3}\, e^{-\varrho|x-y|} + \frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\widetilde{E}(\varrho)}{C(\varrho)}\, e^{-\varrho}\, H_1(x,y,\varrho) + \\ &+ \frac{1}{\varrho^2\, C(\varrho)} \sum_i \left(\varkappa_i(x) + \tilde{\varkappa}_i(y) + \frac{E_i(x,y,\varrho)}{\varrho}\right) e^{-(\alpha_i+1)\varrho}. \end{aligned}\right. \tag{1.28}$$

Eine ähnliche Darstellung würde man in $\mathfrak{B}_2$ finden, dabei sind die $--$-Zeichen in den e-Funktionen durch $+-$Zeichen und C durch C^* zu ersetzen. Es sei bemerkt, daß $P(x,y,\varrho^2)$ die GREENsche Resolvente des Problems $-v''+sv=0$ mit $v(0)=0$, $v(1)=0$ ist.

§ 2. Die Untersuchung von $L^{-1}A_s^{-1}u_0$

Wir unterziehen den Ausdruck

$$u(x,t) = L^{-1}A_s^{-1}u_0 \equiv \frac{1}{2\pi i}\,\text{H.W.}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{st}\left(\int_0^1 G(x,y,s)\,u_0(y)\,dy\right)ds, \tag{2.1}$$

durch den uns die Lösung des Problems I_1 gegeben werden soll, einer genauen Analyse. Dabei ist $\xi_1 > 0$ so gewählt, daß keine Pole von G in der Halbebene $\xi \geq \xi_1$ liegen.

1. $L^{-1}A_s^{-1}u_0$ erfüllt die integrierte Differentialgleichung

Wir beginnen mit einem Zerspaltungsprozeß. Es sei

$$u_0(x) = h_1(x) + h_2(x) \tag{2.2}$$

mit

$$h_1(x) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ m(x) & \varepsilon \leq x \leq 2\varepsilon \\ u_0(x) & \text{für} \quad 2\varepsilon \leq x \leq 1-2\varepsilon, \\ n(x) & 1-2\varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon \leq x \leq 1 \end{array}\right. \qquad h_2(x) = \left\{\begin{array}{c} u_0(x) \\ u_0(x)-m(x) \\ 0 \\ u_0(x)-n(x) \\ u_0(x). \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Da $u_0'''(x)$ in $0 \leqq x \leqq 1$ stetig vorausgesetzt war, so können $m(x)$, $n(x)$ als Hilfsfunktionen so bestimmt werden, daß $h_1'''(x)$, $h_2'''(x)$ in $0 \leqq x \leqq 1$ stetig sind.

a) Die Betrachtung von $w_1 = L^{-1} A_s^{-1} h_1$

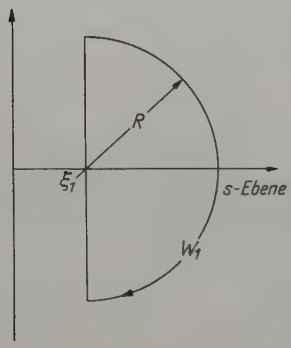
h_1 liegt im Definitionsbereich $\mathfrak{A}$ des Operators A (§ 1.1). Deshalb gilt mit § 1.1 die Darstellung

$$h_1 = A_s^{-1} A_s h_1 = A_s^{-1} (A h_1 + s h_1) \tag{2.4}$$

und damit

$$A_s^{-1} h_1 = \frac{h_1}{s} + z(x, s) \quad \text{mit} \quad z(x, s) = -\frac{1}{s} A_s^{-1} A h_1. \tag{2.5}$$

Nun ist $L^{-1} \frac{1}{s} = 1$ für $t > 0$ und die Konvergenz ist gleichmäßig in $0 < T_0 \leqq t \leqq T_1$. $z(x, s)$ läßt sich mit Lemma 1 durch $|z| \leqq \frac{M}{|s|^2}$ abschätzen. Deshalb konvergiert $L^{-1} z(x, s)$ in $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T_1$ gleichmäßig und absolut. Der Grenzübergang $t \to 0$ darf unter dem Integralzeichen durchgeführt werden und liefert



$$\lim_{t \to 0} L^{-1} z(x, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} z(x, s)\, ds = 0, \tag{2.6}$$

wobei die Null aus dem CAUCHYschen Satz folgt (Figur), indem man das Integral

$$0 = \int_W z(x, s)\, ds = \int_{\xi_1 - iR}^{\xi_1 + iR} z(x, s)\, ds + \int_{W_1} z(x, s)\, ds$$

betrachtet für $R \to \infty$. Nun konvergiert auch noch $L^{-1} z'(x, s)$ gleichmäßig und absolut in $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T_1$, da $|z'| \leqq \frac{M}{|s|^{\frac{3}{2}}}$ mit der Abschätzung (1.25) gilt. Man hat daher die Darstellungen

$$w_1(x, t) = h_1(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{st} z(x, s)\, ds \equiv L^{-1} A_s^{-1} h_1, \tag{2.7}$$

$$w_{1x}(x, t) = h_1'(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{st} z'(x, s)\, ds \equiv L^{-1} \left\{ \frac{d}{dx} A_s^{-1} h_1 \right\} \tag{2.8}$$

für $0 \leqq x \leqq 1$ und $t > 0$. w_1, w_{1x} sind in $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t < \infty$ stetig und es gilt

$$\lim_{t \to 0} w_1(x, t) = h_1(x) \qquad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1 \text{ [5]}. \tag{2.9}$$

[5]) Beachte, daß wir *nicht* behaupten

$$\lim_{t \to 0} L^{-1} A_s^{-1} h_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} A_s^{-1} h_1\, ds.$$

Das letzte Integral ist im allgemeinen sinnlos.

Wie bei MÄCHLER [10] zeigt man jetzt, daß w_1 die integrierte Gleichung

$$(2.10)\quad \begin{cases} \int_0^x \int_0^t \bar{D} w_1 \, d\xi \, d\tau = -\int_0^t \{w_{1\xi} - w_{1\xi}|_{\xi=0}\} d\tau + \int_0^x q(\xi) \left(\int_0^t w_1 \, d\tau \right) d\xi + \\ \qquad + \int_0^x (w_1 - w_1|_{t=0}) \, d\xi = 0 \end{cases}$$

erfüllt. Man wiederhole dazu die in [9] S. 346–348 angestellten Überlegungen für diesen Spezialfall. Durch Differentiation nach x und t erhält man aus (2.10) ferner das Bestehen der Gleichungen

$$(2.11)\quad \begin{cases} \left(\left(-\int_0^t w_{1x} \, d\tau \right)_x + w_1 \right)_t + q(x) \, w_1 = 0, \\ \left(-w_{1x} + \left(\int_0^x w_1 \, d\xi \right)_t \right)_x + q(x) \, w_1 = 0 \end{cases}$$

für alle x, t aus $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t < \infty$.

b) Die Betrachtung von $w_2 = L^{-1} A_s^{-1} h_2$

Wir setzen $\delta = 3\varepsilon$ mit dem in (2.3) festgelegtem $\varepsilon > 0$ und betrachten x nur noch in dem Intervall $\delta \leqq x \leqq 1 - \delta$. w_2 ergibt sich mit (2.3) in der Form

$$(2.12)\quad \begin{cases} w_2(x,t) = L^{-1} \left\{ \int_0^{2\varepsilon} G(x,y,s) \, h_2(y) \, dy + \int_{1-2\varepsilon}^{1} G(x,y,s) \, h_2(y) \, dy \right\} \\ \qquad = w_3(x,t) + w_4(x,t). \end{cases}$$

Für w_3 ist $x - y > 0$ und sogar $x - y \geqq \varepsilon > 0$. Nunmehr schätzen wir die GREENsche Resolvente in der Halbebene $\xi \geqq \xi_1 > 0$ für $3\varepsilon \leqq x \leqq 1 - 3\varepsilon$, $0 \leqq y \leqq 2\varepsilon$ neu ab. Setzt man in dieser Halbebene $s = \sigma e^{i\Theta}$, $-\frac{\pi}{2} < \Theta < \frac{\pi}{2}$, so wird mit unserer Festsetzung aus § 1.1 $\varrho = \sqrt{s} = \sqrt{\sigma} \, e^{i\frac{\Theta}{2}}$ und

$$(2.13)\quad \zeta = \Re \sqrt{s} = \sqrt{\sigma} \cos \frac{\Theta}{2} > \sqrt{\frac{\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{|s|}{2}} \geqq \sqrt{\frac{\xi_1}{2}}.$$

Mit den Entwicklungen in § 1.2 erkennt man, daß $\alpha_i + 1 > 0$ gilt, und daß $G(x,y,s)$ in dieser Halbebene durch

$$(2.14)\quad |G(x,y,s)| \leqq M e^{-\alpha_0 \sqrt{\frac{|s|}{2}}}$$

abgeschätzt werden kann mit einer geeigneten positiven Zahl α_0. Entsprechendes gilt für die Ableitungen. Für $v_3 = \int_0^{2\varepsilon} G(x,y,s) \, h_2(y) \, dy$ findet man dann Abschätzungen der Gestalt

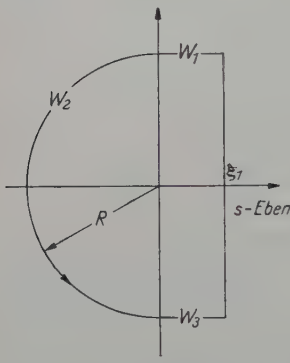
$$(2.15)\quad |v_3| \leqq \mathfrak{C}_1 e^{-\alpha_0 \sqrt{\frac{|s|}{2}}}, \quad |v_1'| \leqq \mathfrak{C}_2 \sqrt{|s|} \, e^{-\alpha_0 \sqrt{\frac{|s|}{2}}}, \quad |v_3''| \leqq \mathfrak{C}_3 |s| \, e^{-\alpha_0 \sqrt{\frac{|s|}{2}}},$$

die auf die Form

$$|v_3|, |v_3'|, |v_3''| \leq \frac{\mathfrak{C}}{|s|^k} \quad \text{mit} \quad k > 0 \text{ beliebig,} \tag{2.16}$$

gebracht werden können. Damit können alle Differentiationen unter dem komplexen Integral durchgeführt werden. w_3 ist in $\frac{1}{3}\varepsilon \leq x \leq 1 - \frac{1}{3}\varepsilon$, $0 \leq t < \infty$ beliebig oft nach t differenzierbar und es ist $\bar{D} w_3 = 0$ sowie $\lim\limits_{t \to 0} w_3(x, t) = 0$. Analoges gilt für w_4 in (2.12).

Zusammenfassung. Da $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$ wegen $\varepsilon > 0$ beliebig, selbst beliebig war, folgt, daß $u(x, t)$ (2.1) und $u_x(x, t)$ in $0 < x < 1$, $0 \leq t < \infty$ stetig sind und $\lim\limits_{t \to 0} u(x, t) = u_0(x)$ für $0 < x < 1$ gilt. Ferner erfüllt $u(x, t)$ die Gln. (2.11). Die Behauptung (b) unseres Satzes ist damit bewiesen.



Die Formel (2.1) läßt nun eine Umschreibung zu. Es ist $u(x, t)$ auch in der Form

$$u(x, t) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint e^{st} A_s^{-1} u_0 \, ds \tag{2.17}$$

für $0 < x < 1$, $t \geq 0$ darstellbar. $\oint$ bedeutet dabei das Kurvenintegral, welches längs des in der Figur angegebenen geschlossenen Weges zu nehmen ist. R in (2.17) durchläuft dabei eine gegen $+\infty$ strebende Folge, die so gewählt wird, daß der Weg durch keine Polstelle von G führt.

Dies ist deshalb klar, weil mit den Abschätzungen in Lemma 1 die Bestandteile über $W_1 + W_2 + W_3$ (Fig. 2) gleichmäßig gegen Null streben für $R \to \infty$. (2.17) gilt jetzt im Gegensatz zu (2.1) sogar für $t \geq 0$, weil das einzig unangenehme Integral $\oint \frac{e^{st}}{s} \, ds$ nach dem Residuumkalkül 1 ergibt unabhängig von t.

2. *Die Stetigkeit von u, u_x in $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$*

Zum Beweis von Stetigkeitseigenschaften von u (s. 2.1) genügt es, sich auf große $|s|$ zu beschränken. Für diese s kennen wir mit (1.28) den genauen Aufbau der GREENschen Resolvente.

a) Durch partielle Integration finden wir zunächst

$$\begin{cases} q_1 = \int\limits_0^1 P(x, y, s) \, u_0(y) \, dy = \dfrac{u_0(x)}{s} - u_0(0) \, T(x, 0, s) + \\ \qquad + u_0(1) \, T(x, 1, s) - \int\limits_0^1 T(x, y, s) \, u_0'(y) \, dy. \end{cases} \tag{2.18}$$

Dabei ist

$$\begin{cases} T(x, y, s) = \dfrac{1}{s \, \mathfrak{Sin} \sqrt{s}} \times \\ \times \begin{cases} \mathfrak{Sin} \sqrt{s} \, (1 - x) \, \mathfrak{Cof} \sqrt{s} \, y \\ - \mathfrak{Sin} \sqrt{s} \, x \, \mathfrak{Cof} \sqrt{s} \, (1 - y) \end{cases} \text{für} \begin{matrix} x \geq y \\ x \leq y \end{matrix}, \quad T(x, 0, s) = T(1 - x, 1, s). \end{cases} \tag{2.19}$$

Durch weitere partielle Integration ergibt sich schließlich

$$(2.20)\quad \begin{cases} q_1 \equiv \frac{1}{s}\left(u_0(x) + \frac{u_0''(x)}{s}\right) - \left(u_0(0) + \frac{u_0''(0)}{s}\right) T(x,0,s) + \\ \qquad + \left(u_0(1) + \frac{u_0''(1)}{s}\right) T(x,1,s) - \frac{1}{s}\int_0^1 T(x,y,s)\, u_0'''(y)\, dy. \end{cases}$$

Bis auf den letzten Term, der mit q_2 bezeichnet werde, können alle Glieder explizit rücktransformiert werden. Man findet unter anderem für $t>0$

$$(2.21)\quad \begin{cases} L^{-1} T(x,0,s) = \int_x^1 \vartheta_3\left(\frac{\tau}{2}, t\right) d\tau \text{ [6]}, \quad L^{-1} T(x,1,s) = -\int_{1-x}^1 \vartheta_3\left(\frac{\tau}{2}, t\right) d\tau, \\ L^{-1}\frac{T(x,0,s)}{s} = \int_0^t \left(\int_x^1 \vartheta_3\left(\frac{\tau}{2}, t\right) d\tau\right) dt, \quad L^{-1}\frac{1}{s^2} = t. \end{cases}$$

Dabei ist $\vartheta_3(\tau, t)$ gegeben durch

$$(2.22)\qquad \vartheta_3(\tau,t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2 t}\cos 2k\pi\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\tau+k)^2}{t}}.$$

Für q_2 findet man $|q_2| \leqq \frac{\mathfrak{C}_4}{|s|^2}$, $\frac{d}{dx} q_2 \leqq \frac{\mathfrak{C}_5}{|s|^{\frac{3}{2}}}$, so daß $L^{-1}q_2$ und $\frac{d}{dx} L^{-1}q_2$ in $0 \leqq x \leqq 1$, $t \geqq 0$ stetig sind und überdies die Differentiation unter dem komplexen Integral durchgeführt werden darf. Ferner wird behauptet, daß $L^{-1}q_1 = Q_1(x,t)$ für $t \geqq 0$ und festes x aus $0 \leqq x \leqq 1$ eine $\mathfrak{L}$-Funktion ist, das bedeutet unter anderem, daß $\lim\limits_{\omega\to\infty} \int_0^{\omega} e^{-s_0 t} Q_1(x,t)\, dt$ für ein reelles oder komplexes s_0 existiert [7]. Dieses ist für die Thetafunktion ϑ_3 wohlbekannt (G. DOETSCH [6], S. 306), für $L^{-1}q_2$ folgt es aus [7] S. 263, Satz 4.

Zur Bildung von $\frac{\partial}{\partial t} L^{-1}q_2$ schreiben wir $L^{-1}q_2$ in der Form

$$(2.23)\qquad L^{-1}q_2 \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} \frac{e^{st}}{s}\left(\int_0^1 T(x,y,s)\, u_0'''(y)\, dy\right) ds.$$

Dabei konvergiert das Integral

$$(2.24)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\int_0^1 T(x,y,\xi_1 + i\eta)\, u_0'''(y)\, dy\right|^2 d\eta \leqq \mathfrak{C}_6$$

---

[6]) Man benutze dazu etwa das Tabellenwerk [8]. Dieses gibt zu einem u das dazugehörige $v = Lu$ an, garantiert aber im allgemeinen nicht die Darstellung $u = L^{-1}v$. In unseren einfachen Fällen kann dies aber leicht mit allgemeinen Sätzen geschehen (s. etwa G. DOETSCH [7], S. 263, Satz 4).

[7]) Vgl. G. DOETSCH [7], S. 32 für eine genaue Definition.

gleichmäßig in $0 \leqq x \leqq 1$. Daraus folgt mit [11], daß $\frac{\partial}{\partial t} L^{-1} q_2$ fast überall (d.h. bis auf eine zweidimensionale Punktmenge vom Maße Null) existiert. Damit ist zusammenfassend nachgewiesen, daß $L^{-1} q_1$, $\frac{\partial}{\partial x} L^{-1} q_1$ in $0 \leqq x \leqq 1$, $t > 0$ stetig sind und $\frac{\partial}{\partial t} L^{-1} q_1$ existiert dort fast überall. Ferner ist $L^{-1} q_1$ eine $\mathfrak{L}$-Funktion.

b) Für den zweiten Ausdruck in (1.28) findet man

$$(2.25)\quad \left\{ \begin{aligned} q_3 &\equiv \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{2s} \int_0^1 \left(Q(y) - Q(x)\right) e^{-\sqrt{s}\,|x-y|}\, u_0(y)\, dy \\ &= \frac{1}{2s^{\frac{3}{2}}} \left\{ Q(x)\, u_0(0)\, e^{-\sqrt{s}\,x} + \left(Q(1) - Q(x)\right) u_0(1)\, e^{-\sqrt{s}\,(1-x)} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2s^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 e^{-\sqrt{s}\,|x-y|} \left\{ \left(Q(x) - Q(y)\right) u_0(y) \right\}' dy \end{aligned} \right.$$

mit $' \equiv \frac{d}{dx}$. Die ersten Terme können sofort rücktransformiert werden. Man hat etwa

$$(2.26)\qquad L^{-1} \frac{e^{-\sqrt{s}\,x}}{s^{\frac{\beta}{2}}} = 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi .$$

Für den letzten Term in (2.25) $(= q_4)$ findet man $|q_4| \leqq \frac{\mathfrak{C}_7}{|s|^{\frac{3}{2}}}$ und mit leichten Abschätzungen

$$(2.27)\qquad \left| \frac{d}{dx} q_4 \right| \leqq \frac{\mathfrak{C}_8}{|s|} \left\{ \int_0^x e^{-\operatorname{Re}\sqrt{s}\,(x-y)}\, dy + \int_x^1 e^{-\operatorname{Re}\sqrt{s}\,(y-x)}\, dy \right\} \leqq \frac{\mathfrak{C}_9}{|s|\operatorname{Re}\sqrt{s}} \leqq \frac{\mathfrak{C}_{10}}{|s|^{\frac{3}{2}}}$$

mit (2.13) auf dem Integrationsweg $\xi_1 - i\infty \ldots \xi_1 + i\infty$. Damit sind $L^{-1} q_4$, $\frac{\partial}{\partial x} L^{-1} q_4 = L^{-1} \frac{\partial}{\partial x} q_4$ gleichmäßig und absolut konvergent in $0 \leqq x \leqq 1$, $t > 0$. Schließlich folgt ganz analog auch die Existenz von $\frac{\partial}{\partial t} L^{-1} q_4$ fast überall und q_4 hat zusammenfassend dieselben Eigenschaften wie q_1.

c) Nunmehr werde der Ausdruck

$$(2.28)\quad \left\{ \begin{aligned} q_5 &\equiv \frac{1}{s} \int_0^1 \left\{ \frac{\tilde{E}(\sqrt{s})}{C(\sqrt{s})}\, e^{-\sqrt{s}}\, H_1(x, y, \sqrt{s}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{C(\sqrt{s})} \sum \left(\varkappa_i(x) + \tilde{\varkappa}_i(y)\right) e^{-(\alpha_i+1)\sqrt{s}} \right\} u_0(y)\, dy \end{aligned} \right.$$

aus (1.28) betrachtet. Zunächst ist auf dem Integrationsweg $\xi_1 - i\infty \ldots \xi_1 + i\infty$ mit (1.10), (1.26a)

$$(2.29)\qquad \frac{1}{C(\sqrt{s})} = \frac{1}{A} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-2\nu\sqrt{s}}, \quad \frac{\tilde{E}}{C} = \frac{\varkappa}{sA} + \frac{\bar{E}(\sqrt{s})}{s^{\frac{3}{2}} A} + \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}} \{\ldots\}.$$

Die Terme von $e^{-\alpha_i s} H_1$ haben mit (1.20), (1.21) die Gestalt $e^{-(\alpha_i+1)s}$, wobei $\alpha_i + 1 \geqq 0$. Der „schlechteste" Term im ersten Term von (2.28) hat damit die Gestalt $\frac{x}{A s^2} e^{(\alpha_i+1)s}$ und zeigt wesentlich besseres Konvergenzverhalten als die Ausdrücke unter a) und b). Man wird keine Schwierigkeiten haben, für q_5 dieselben Eigenschaften nachzuweisen, die wir für q_1 fanden.

d) Es verbleiben aus (1.28) Ausdrücke der Gestalt

$$q_6 \equiv \int_0^1 \frac{E(x, y, \sqrt{s})}{s^{\frac{3}{2}}} \begin{Bmatrix} e^{-\sqrt{s}|x-y|} \\ e^{-(\alpha_i+1)\sqrt{s}} \end{Bmatrix} u_0(y)\, dy, \tag{2.30}$$

die mit Abschätzungen der Form (2.27) behandelt werden können. Bei der Betrachtung von $\frac{\partial}{\partial x} q_6$, führe man die Differentiation lediglich an den e-Funktionen aus. Daß dieses für große $|s|$ ausreichend ist, folgt aus dem Vergleich von v_k' mit v_k in (1.6).

Zusammenfassung. Der Ausdruck $u = L^{-1} A_s^{-1} u_0$ hat die gleichen Differenzierbarkeitseigenschaften wie die untersuchten q-Größen. Damit sind u, u_x in $0 \leqq x \leqq 1, t > 0$ stetig, u_t existiert dort fast überall und u ist eine $\mathfrak{L}$-Funktion.

3. Die Stetigkeit von u_t in $0 < x < 1, t > 0$

Das Vorliegen eines offenen x-Intervalls gestattet es, die Methoden der Nr. 1 und 2 zu kombinieren. Nach Nr. 1 genügt mit $u = w_1 + w_2$ die Betrachtung von

$$w_1 = h_1 - L^{-1}\left\{\frac{1}{s} A_s^{-1} u_1\right\} \quad \text{mit} \quad u_1 = A h_1 \tag{2.31}$$

und $u_1(x), u_1'(x)$ stetig in $0 \leqq x \leqq 1$. Die Behandlung von $A_s^{-1} u_1$ erfolgt nach dem Muster von Nr. 2 unter Benutzung nur einmaliger partieller Integration. Wir beginnen ähnlich wie in (2.18) mit

$$\left\{\begin{aligned} \bar{q}_1 &\equiv \frac{1}{s}\int_0^1 P(x, y, s)\, u_1(y)\, dy = \frac{u_1(x)}{s^2} - \frac{u_1(0)}{s} T(x, 0, s) + \\ &+ \frac{u_1(1)}{s} T(x, 1, s) - \frac{1}{s}\int_0^1 T(x, y, s)\, u_1'(y)\, dy. \end{aligned}\right. \tag{2.31}$$

Die ersten Terme werden explizit zurücktransformiert und dann nach t differenziert. Für den letzten Term $\bar{q}_2$ finden wir mit (2.19) etwa für $x \geqq y$

$$\left\{\begin{aligned} |\bar{q}_2| &\leqq \mathfrak{C}_1 \frac{|\operatorname{Sin}\sqrt{s}(1-x)|}{|s|^2} \int_0^x \left|\frac{\operatorname{Cof}\sqrt{s}\, y}{\operatorname{Sin}\sqrt{s}}\right| dy \\ &\leqq \mathfrak{C}_1 \frac{|\operatorname{Sin}\sqrt{s}(1-x)|}{|s|^2} \int_0^x \frac{1 + e^{-2y\sqrt{\frac{\xi_1}{2}}}}{1 - e^{-2y\sqrt{\frac{\xi_1}{2}}}} e^{-(1-y)\operatorname{Re}\sqrt{s}}\, dy \\ &\leqq \frac{\mathfrak{C}_2}{|s|^2 \operatorname{Re}\sqrt{s}} \leqq \frac{\mathfrak{C}_3}{|s|^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}\right. \tag{2.32}$$

und analoges für $x \leqq y$ mit Benutzung von (2.13). Damit ist $\frac{\partial}{\partial t} L^{-1} \bar{q}_1$ stetig und die Differentiation darf unter dem komplexen Integral vorgenommen werden. Analoges findet man für die weiteren Terme und endlich wie in Nr. 2 die Stetigkeit von $u_t(x, t)$ in $0 < x < 1$, $t > 0$.

Damit sind die Möglichkeiten der asymptotischen Darstellung (1.18) voll ausgenützt. Es ist nicht so, daß durch höhere Differentiationsforderungen an u_0 auch die Stetigkeit von u_t in $0 \leqq x \leqq 1$ mit unserer Methode erzwungen werden könnte, wie die Terme (2.30) zeigen.

4. Das Erfülltsein der Differentialgleichung

$u = L^{-1} A_s^{-1} u_0$ erfüllt die Relationen (2.11), wobei die Differentiationen nach t ausgeführt werden dürfen. Man findet

$$\left(-\int_0^t u_x \, dt\right)_{xt} + u_t + q(x) u = 0. \tag{2.33}$$

Setzen wir $F(x, t) = -\int_0^t u_x \, dt$, so sind F_x, F_t, F_{xt} stetig und es folgt nach dem SCHWARZschen Satz $F_{xt} = F_{tx} = -u_{xx}$ für $0 < x < 1$, $t > 0$.

5. Die Randbedingungen

Wir betrachten mit COURANT [5] die Hilfsfunktion

$$w(x, t) = L^{-1}\left\{\frac{A_s^{-1} u_0}{s}\right\}. \tag{2.34}$$

Nun ist $u = L^{-1} A_s^{-1} u_0$ eine $\mathfrak{L}$-Funktion und mit [7] S. 218, Satz 1 folgt $w(x, t) = \int_0^t u(x, \tau) \, d\tau$. Mit dem Lemma in § 1, Nr. 2 folgt

$$v(x, s) = |A_s^- u_0| \leq \frac{M}{|s|}, \quad |v'| \leq \frac{M}{|s|^{\frac{1}{2}}},$$

so daß wegen der gleichmäßigen Konvergenz

$$\lim_{x \to 0} w(x, t) = L^{-1}\left\{\frac{v(0, s)}{s}\right\}, \quad \lim_{x \to 0} w_x(x, t) = L^{-1}\left\{\frac{v'(0, s)}{s}\right\} \tag{2.35}$$

gilt. Analoges für $x = 1$. v erfüllt die Relation $R_i v = 0$. Wir finden

$$L^{-1}\left\{\frac{R_i v}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\left(\frac{a_{i1}}{s} + a_{i3}\right) v(0, s) + \frac{a_{i2}}{s} v'(0, s) + \cdots\right\} = 0. \tag{2.36}$$

Nach (2.34) gibt dies

$$\begin{aligned} &a_{i1} w(0, t) + b_{i1} w(1, t) \\ &\qquad = -\{a_{i2} w_x(0, t) + b_{i2} w_x(1, t) + a_{i3} u(0, t) + b_{i3} u(1, t)\}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Die linke Seite ist für $t>0$ stetig nach t differenzierbar. Nun ist w_x, $w_t = u(x,t)$, $w_{tx} = u_x$ in $0 \leq x \leq 1$, $t>0$ stetig. Also folgt $w_{tx} = w_{xt}$ und (2.37) ergibt nach Differentiation

$$\begin{cases} a_{i1}u(0,t) + b_{i1}u(1,t) + a_{i2}u_x(0,t) + b_{i2}u_x(1,t) \\ \qquad = -\frac{\partial}{\partial t}\{a_{i3}u(0,t) + b_{i3}u(1,t)\}. \end{cases} \tag{2.38}$$

Setzen wir

$$\varphi_i(t) = a_{i1}w(0,t) + b_{i1}w(1,t) + a_{i2}w_x(0,t) + b_{i2}w_x(1,t) \tag{2.39}$$

so ist $\frac{d}{dt}\varphi_i(t)$ stetig für $t>0$ und aus (2.37), (1.7) folgt

$$u(0,t) = \frac{1}{A}\begin{vmatrix} \varphi_1 & b_{13} \\ \varphi_2 & b_{23} \end{vmatrix}, \quad u(1,t) = \frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_{13} & \varphi_1 \\ a_{23} & \varphi_2 \end{vmatrix}. \tag{2.40}$$

Damit ist $u_t(0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\lim_{x\to 0} u(x,t)\right)$, $u_t(1,t)$ stetig und das Erfülltsein der Randbedingungen folgt aus (2.38).

6. $u(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{s_\nu t} R_\nu(x,t)$

Es ist $v = A_s^{-1}u_0$ analytisch in s bis auf die Pole s_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, die in der linken Halbebene $\Re e\, s < \xi_1$ liegen. Ferner ist bekannt, daß $u(x,t) = L^{-1}v$ eine $\mathfrak{L}$-Funktion ist für $0 \leq x \leq 1$, $t>0$. Auf den in $\Re e\, s \leq \xi_1$ gelegenen Bögen von den Kreisen $|s| = r_n$ ($n = 1, 2, \ldots, r_n \to \infty$) die durch keinen Pol hindurchgehen, ist $|v| \leq \frac{M}{|s|}$. Unter Benutzung von [6], S. 276, Satz 1 folgt die Darstellung

$$u(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{s_\nu t} R_\nu(x,t), \qquad 0 \leq x \leq 1,\ t>0, \tag{2.41}$$

wobei die Summe über die Residuen von $A_s^{-1}u_0$ zu nehmen ist. Für $0<x<1$, $t \geq 0$ folgt dies sofort aus (2.17), womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

Literatur

[1] BIRKHOFF, G. D.: On the asymptotic character of solutions of certain linear differential equations, etc. Trans. Amer. Math. Soc. **9** (1908). — [2] CHURCHILL, R. V.: The solution of linear boundary-value problems in physics by means of the Laplace-transformation. Part I: A theory for establishing a solution in the form of an integral, for problems with vanishing initial conditions. Math. Ann. **114**, 591—613 (1937). — [3] CHURCHILL, R. V.: Modern operational mathematics in engineering. New York u. London 1944. — [4] CODDINGTON, E. A., and N. LEVINSON: Theory of ordinary differential equations. New York u. London 1955. — [5] COURANT, R., u. D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik, Bd. II. Berlin 1937. — [6] DOETSCH, G.: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937. — [7] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Bd. I: Theorie der Laplace-Transformation. Basel 1950. — [8] DOETSCH, G.: Tabellen zur Laplace-Transformation. Berlin 1947. —

[*9*] HELLWIG, G.: Anfangs- und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen von wechselndem Typus auf den Rändern. Math. Z. **58**, 337—357 (1955). — [*10*] MÄCHLER, W.: Laplacesche Integraltransformation und Integration partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen und parabolischen Typus. Comm. Math. Helv. **5**, 256—304 (1933). — [*11*] PLANCHEREL, M.: Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies. Rend. di Palermo **30** (1910). — Sur les formules d'inversion de Fourier et de Hankel. Proc. London, Math. Soc. (2) **24** (1925). — [*12*] TAMARKIN, J.: Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations etc. Math. Z. **27**, 1—54 (1927). — [*13*] FELLER, W.: Two singular diffusion problems. Ann. of Math. **54**, 173—182 (1951). — Diffusion processes in one dimension. Trans. Amer. Math. Soc. **77**, 1—31 (1954). — [*14*] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. III. Basel.

Berlin-Charlottenburg, Mathematisches Institut der Technischen Universität

(Eingegangen am 7. August 1956)

Einführung in die mathematische Statistik

Von Dr. **Leopold Schmetterer**, Professor an der Universität Wien. Mit 13 Textabbildungen. XXIII, 405 Seiten Gr.-8°. 1956. Ganzleinen DM 49.—

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. — Elementare Stichprobentheorie. — Konfidenzbereiche. — Theorie der Parameterschätzung. — Einführung in die Testtheorie. — Regressionstheorie und Stichprobentheorie mehrdimensionaler Normalverteilungen. — Einführung in die nichtparametrischen Theorien. — Die klassische Bayessche Methode. — Namen- und Sachverzeichnis.

Ein einführendes modernes Lehrbuch der mathematischen Statistik, das sich in erster Linie an den Mathematiker und an den mathematisch interessierten Statistiker wendet, hat in der deutschsprachigen Fachliteratur bisher gefehlt. Diesem fühlbaren Mangel entsprechend hat der Verfasser, gestützt auf seine Vorlesungen an der Wiener Universität, das vorliegende Werk geschrieben, in dem er ausführlich auf die Ergebnisse der großartigen Entwicklungen der letzten 25 Jahre eingeht, die freilich zum großen Teil schon als klassisch bezeichnet werden können und mit den Namen Fisher, Pearson und insbesondere Neyman verknüpft sind. Darüber hinaus enthält das Buch auch neuere Ergebnisse, die sich bisher wohl kaum in einer zusammenfassenden Darstellung finden. In den Kapiteln, die der eigentlichen mathematischen Statistik gewidmet sind, wurde auf vollständige Beweise aller Sätze großer Wert gelegt, ein Vorgang, der ja in der statistischen Literatur nicht stets eingehalten wird. Dem Studierenden soll mit diesem Buche die Möglichkeit geboten werden, sich mit den Grundlagen vertraut zu machen und jene Voraussetzungen zu erwerben, die für ein tieferes Eindringen in die Materie erforderlich sind. Um den einführenden Charakter dieser Darstellung zu wahren, wurde auf den Zusammenhang mit den Fragen der modernen Spieltheorie und der Theorie der Entscheidungsfunktionen nicht eingegangen. Im übrigen ist aber die Literatur bis zum Ende des Jahres 1954 soweit als möglich berücksichtigt, so daß die Lektüre des Buches wohl jeden Leser instandsetzen wird, sich den schwierigeren Fragen und neuesten Untersuchungen in der mathematischen Statistik zuzuwenden. Auch auf Anwendungen, insbesondere im Rahmen der technischen Statistik wurde nicht vergessen. Eine Gegenüberstellung der deutschen Ausdrücke und der analogen Termini der englischen Literatur im Anhang bildet einen nützlichen Behelf für das Studium der fremdsprachigen Literatur.

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Physik

Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen. Von Professor Dr. **Chr. Gerthsen,** Direktor des Physikalischen Instituts der Technischen Hochschule Karlsruhe. Vierte Auflage. Mit 647 Abbildungen. XV, 545 Seiten Gr.-8°. 1956.

Ganzleinen DM 29.80

Aus den Besprechungen:

... Das GERTHSENsche Buch mit seinen scharf disponierten Kapiteln, der klaren Unterteilung, der knappen Formulierung und den sorgfältigen Zeichnungen erweckt schon beim Anfänger Vertrauen. Wer die Physik näher kennt und hinter die Kulissen der Darstellung schaut, erkennt manchen klugen Weg und manche geschickte Formulierung eines Autors, der ebenso Pädagoge wie Wissenschaftler ist, und der sich selbst über gelungene Experimente und abgerundete Formulierungen zu freuen vermag. Das Buch ist daher nicht nur ein wahres Arbeitsbuch für viele Studenten geworden, sondern hat auch die Anerkennung vieler Hochschullehrer gefunden.
Für den, der das Fundament der Physik bereits kennt, wird es Arbeits- und Nachschlagewerk sein. Es hält ihn nicht mit weitschweifigen Ausführungen auf, sondern ruft ihm schnell Wesentliches in Erinnerung zurück oder vermittelt ihm moderne Kenntnis. Natürlich ist in dem Buch nicht wie in einem Lexikon alles zu finden, aber das Bild der heutigen Physik ist in ihm enthalten. Der Referent ist überzeugt, daß die neue Auflage, deren Umfang durch sparsamen Druck sogar von 570 auf 546 Seiten verringert ist, und die durch Anpassung an den heutigen Wissensstand und durch manche neue Abbildung aus der heutigen Forschung gewonnen hat, noch mehr als ehemals vielen Studenten, Physikern und Ingenieuren eine willkommene Bereicherung sein wird.

„Physikalische Blätter"

Das vorliegende Buch ist aus einer Reihe von Niederschriften entstanden, welche der Autor in den ersten Nachkriegsjahren, als der Mangel an geeigneten Lehrbüchern besonders fühlbar wurde, den Hörern seiner Vorlesung über Experimentalphysik in die Hände gab. Hieraus erklärt sich, daß Gliederung und Aufbau des Inhalts in mancher Hinsicht von dem Charakter der bekannten Lehrbücher abweichen. So wird auch im Vorwort ausdrücklich betont, daß dieses Werk die Experimentalvorlesung nicht ersetzen, sondern sie ergänzen soll. Aus dem gleichen Grund wurde auch darauf verzichtet, durch Anfügung größerer Tabellen das Buch seinem Charakter zu entfremden und ein Nachschlagewerk daraus zu machen. Die 4. Auflage des lange vergriffenen Buches ist durch eine gründliche Überarbeitung seines Inhalts der inzwischen fortgeschrittenen Entwicklung des physikalischen Wissens angepaßt worden. ... Zusammenfassend kann gesagt werden, daß dieses Lehrbuch zweifelsohne eine große Bereicherung darstellt, zumal es dank der vorzüglichen didaktischen Fähigkeiten seines Autors seine wichtigste Aufgabe voll und ganz erfüllt: die Erziehung zum physikalischen Denken.

„Zentralblatt für die gesamte Radiologie"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany